REDE
Revista Ensino em Debate

A geometria analítica como aliada importante na aprendizagem em cálculo diferencial e integral: o caso de integrais múltiplas nos cursos de engenharias

Analytical geometry as an important ally in learning differential and integral calculus: the case of multiple integrals in engineering courses

La geometría analítica como aliado importante en el aprendizaje del cálculo diferencial e integral: el caso de las integrales múltiples en las carreras de ingeniería

Afonso Henriques[1]*, Elisângela Silva Farias[2]**, Rosane Leite Funato[3]***

Resumo

Este artigo tem como objetivo principal apresentar uma análise das práticas efetivas dos estudantes de cursos de Engenharias sobre a leitura e interpretação de geradores de tarefas elaborados no cenário do ensino das Integrais Múltiplas, e as suas realizações pelos estudantes. Os geradores de tarefas tendem a eliminar efeitos topázios específicos que sobrevivem no referido cenário, e valorizam a mobilização de diferentes registros de representação semiótica na realização das tarefas gerenciadas. Nesta mobilização, a Geometria Analítica se apresenta como uma aliada natural e importante na aprendizagem das Integrais Múltiplas. Para almejar o referido objetivo, mergulhamos a pesquisa na teoria dos Registros de Representação Semiótica e Antropológica do Didático. Seguimos a análise institucional & sequência didática como metodologia de pesquisa. Os resultados obtidos mostram que os estudantes apresentam diversas dificuldades que se manifestam, não apenas na leitura e interpretação das tarefas gerenciadas, mas principalmente na coordenação das representações de objetos de saberes preliminares em diferentes registros, em especial os registros da Língua materna, algébrico, gráfico e numérico, necessários no estabelecimento e cálculo de uma Integral Múltipla. Recomenda-se, portanto, dar-se mais atenção institucional para a aprendizagem destes estudantes.

Palavras-chave: Aprendizagem em CDI III. Práticas efetivas de estudantes. Gerador de tarefas. Curvas e Superfícies. Sólidos.

Abstract

The main objective of this article is to present an analysis of the effective practices of students in Engineering courses about the reading and the interpreting task generators created in the context of teaching Multiple Integrals, and their achievements by students. Task generators tend to eliminate specific topaz effects that survive in that scenario, and value the mobilization of different registers of semiotic representation in solving managed tasks. In this mobilization, Analytical Geometry presents itself as a natural and important ally in learning Multiple Integrals. To achieve this objective, we immersed the research in the theory of Records of Semiotic and Anthropological Representation of

[1] **Afonso Henriques**
Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, Brasil. Doutor em Matemática e Informática pela Universidade Joseph Fourier em Grenoble (França) e Professor Pleno na UESC. Departamento de Ciências Exatas (DCEX). E-mail: henry@uesc.br. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8783-6008. http://lattes.cnpq.br/0317385977493237

[2] **Elisângela Silva Farias**
Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, Brasil. Mestre em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (UFBA). Professora Assistente na UESC. Departamento de Ciências Exatas (DCEX). E-mail esfarias@uesc.br. ORCID https://orcid.org/0000-0002-4052-2351. http://lattes.cnpq.br/8896684226630644

[3] **Rosane Leite Funato**
Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, Brasil. Mestre em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (UFBA). Professora Assistente na UESC. Departamento de Ciências Exatas (DCEX). E-mail: rlfunato@uesc.br ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6799-0876. Lattes: http://lattes.cnpq.br/8649028055240768

Didactics. We follow institutional analysis & didactic sequence as a research methodology.The results obtained show that students present several difficulties, not only in reading and interpreting the tasks managed, but mainly in coordinating the representations of objects of preliminary knowledge in different registers, especially the registers of mother tongue, algebraic, graphic and numeric, necessary in the establishment and calculation of a Multiple Integral. Therefore, it´s recommended that more institutional attention be given to the learning of these students.
Keywords: Learning in CDI III. Effective practices of student. Task generator. Curves and Surfaces. Solids.

Resumen

El objetivo principal de este artículo es presentar un análisis de las prácticas efectivas de los estudiantes de carreras de Ingeniería en lectura e interpretación de tareas generadoras creadas en el contexto de la enseñanza de Integrales Múltiples, y sus logros por parte de los estudiantes. Los generadores de tareas tienden a eliminar efectos topazios específicos que sobreviven en ese escenario y valoran la movilización de diferentes registros de representación semiótica para resolver tareas gestionadas. En esta movilización, la Geometría Analítica se presenta como un aliado natural e importante en el aprendizaje de Integrales Múltiples. Para lograr este objetivo, sumergimos la investigación en la teoría de los Registros de Representación Semiótica y Antropológica de la Didáctica. Seguimos el análisis institucional y la secuencia didáctica como metodología de investigación. Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes presentan varias dificultades que se manifiestan, no sólo en la lectura e interpretación de las tareas manejadas, sino principalmente en la coordinación de las representaciones de objetos de conocimiento preliminar en diferentes registros, especialmente los registros de lengua materna, algebraico, gráfico y numérico, necesario en el establecimiento y cálculo de una Integral Múltiple. Por lo que se recomienda que se preste más atención institucional al aprendizaje de estos estudiantes.
Palabras clave: Aprendizaje en CDI III. Prácticas estudiantiles efectivas. Generador de tareas. Curvas y Superficies. Sólidos.

Introdução

A aprendizagem efetiva das Integrais Múltiplas (IM) em Cálculo Diferencial e Integral (CDI), envolve diferentes saberes e habilidades de grande importância para o aprofundamento do raciocínio matemático, desenvolvimento científico, interpretação, assim como resolução de situações problemas inerentes. Portanto, essa aprendizagem não deve ser resumida em calcular uma integral previamente estabelecida pelo Professor[4] ou pelo autor de um livro didático, pois este estabelecimento consiste em uma representação que reúne um conjunto de saberes preliminares necessários na compreensão das IM, e deve ser proposta como tarefa do estudante, do contrário, estaremos alimentando o efeito topázio no processo ensino-aprendizagem das IM. De fato, durante o desenvolvimento da prática pedagógica matemática, podemos observar certas situações em que o estudante se sente bloqueado diante da dificuldade momentânea de realizar uma tarefa. Com essa dificuldade do estudante, o Professor pode se ver na situação didática de acelerar a aprendizagem, antecipando o resultado que deveria ser alcançado com os próprios esforços do estudante. Brousseau (1998, p. 52) denomina essa situação didática de efeito topázio. Esse efeito é presente nas Organizações

[4] O autor defende que o termo Professor será e deveria sempre ser escrito com a letra P maiúscula, pois este é um profissional que merece e deve ser respeitado como os outros. O simples gesto de aplicar a letra maiúscula engrandece também a sua personalidade (Henriques, 2019, p. 13)

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v2.e2024005 2965-6753

Matemáticas Dominantes (OMD) nas Instituições de Ensino Superior (IES).

> Na tarefa *calcular a integral dupla dada por* $\int_1^2 \int_1^2 (x+y)dydx$, por exemplo, é eliminada da prática efetiva do estudante a subtarefa de estabelecer essa integral. Com efeito, uma interpretação geométrica da tarefa permite mobilizar competências de cálculo de volume do sólido compreendido entre o plano de equação dada por $z = x + y$ (correspondente a função a integral $f(x,y) = x + y$) e a sub-região (domínio de integração) do plano_*xy*, dada analiticamente por $R = \{(x,y)\epsilon R^2; 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. Com a eliminação dessas tarefas, sobra para o estudante apenas a tarefa de realizar os cálculos (Henriques; Nagamine; Nagamine; 2012, p. 1276)

Como veremos mais adiante, os geradores de tarefas tendem a eliminar esse efeito topázio, valorizando a mobilização de diferentes registros de representação semiótica na realização das tarefas gerenciadas, onde os saberes preliminares exercem um papel preponderante.

Nesse sentido vale ressaltar que nas OMD supracitadas, o ensino das IM de funções de mais de uma variável garante uma estreita relação com os saberes ensinados anteriormente. Pois é notável, nas OMD com referências em Livros Didáticos (LD), que o ensino das IM é introduzido por analogia com as Integrais Simples (IS) de funções de uma variável real. Dependendo da organização do autor do LD, essa analogia pode ser mencionada por simples lembrete, sem explicitar etapas específicas, dando, contudo, referência ao capítulo correspondente as IS, como ocorre na obra de Thomas (2009), volume II, ou mobilizando-se explicitamente quatro passos essenciais, como lemos, por exemplo, em Swokowski (1994, p. 460), quando o autor escreve:

> Lembramos que $\int_a^b f(x)dx$ pode ser definida aplicando-se os quatro passos seguintes. **Passo1** Particionar [*a*, *b*] escolhendo $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$. **Passo 2** Para cada *k*, escolher um número w_k no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. **Passo 3** Formar a soma de Riemann $\sum_k f(x_k)\Delta x_k$, com $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. **Passo 4** Se $||P||$ é a norma da partição (o maior Δx_k), então
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \sum_k f(x_k)\Delta x_k$$

Além das descrições correspondentes, às referidas etapas são acompanhadas de duas ilustrações que entendemos como mecanismos de ativação de representações de objetos inerentes no registro gráfico, mobilizando-se assim objetos geométricos específicos, conforme mostrado na Figura 1.

Figura 1: Ilustração de passos considerados no processo da definição da integral definida em [a, b]

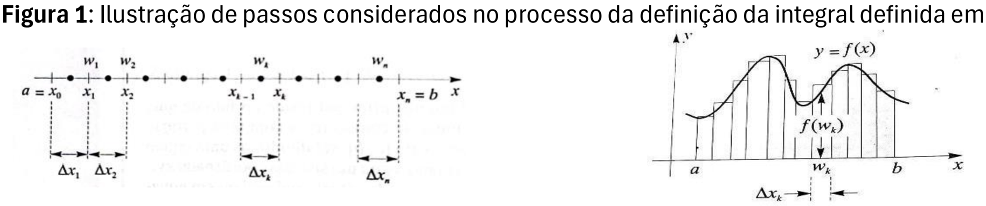


Fig.1(a) Ilustração dos dois primeiros passos

Fig.1(b) Ilustração do terceiro passo, para *f* não negativa em [a, b]

Fonte: Swokowski (1994, p. 460)

Esses quatro passos são utilizados, não apenas no Swokowski, como também em outras obras, como referência para conduzir o estudante à compreensão da definição de Integrais Duplas, e posteriormente a definição de Integrais Triplas, assim como em todo ensino que envolve integrais definidas, a exemplo das Integrais de Linhas ou Curvilíneas, e Integrais de Superfícies.

Três registros de representação são vivas nesta apresentação, notadamente o registro da língua materna (por discurso racional mediante a explicação ou descrição de cada passo), o registro algébrico (pela explicitação de cada expressão ou equação colocada em jogo) e o registro gráfico (pelas ilustrações de objetos matemáticos mediante a mobilização de propriedades geométricas).

Essa conjuntura mostra, imediatamente, que o ensino de integrais não sobrevive sem a mobilização de diferentes registros de representação semiótica. Além disso, é notável que as IM, como quaisquer objetos de saberes matemáticos, gozam de Organizações Praxeológicas Dominantes nas instituições nas quais são ensinadas. Neste contexto, encontramos uma fundamentação na Teoria Antropológica do Didático (TAD), em especial na sua vertente praxeológica.

Assim, este artigo é fundamentado nas duas teorias que acabamos de mencionar, notadamente, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (1993, 1995,...) e a TAD de Chevallard (1992, 2009, ...). Essas teorias serão apresentadas, sucintamente, mais adiante, para auxiliarem na análise de dois elementos institucionais visados na nossa pesquisa fonte deste artigo, notadamente o Livro Didático (LD) e o estudante na tentativa de responder o seguinte questionamento: *Quais são as práticas efetivas dos estudantes de cursos de Engenharias nas IES diante da leitura e interpretação de geradores de tarefas elaborados no cenário do ensino das Integrais Múltiplas?*

Este questionamento motiva, naturalmente, almejar o seguinte objetivo: Analisar as práticas efetivas dos estudantes de cursos de Engenharias diante da leitura e interpretação de geradores de tarefas elaborados no cenário do ensino das Integrais Múltiplas. Com efeito, organizamos este artigo em quatro partes.

A primeira consiste, exatamente, nesta introdução. A segunda parte se dedica a apresentação do Quadro teórico constituído pelas duas teorias a que nos referimos. A terceira parte é destinada à apresentação da Metodologia, e a análise das práticas efetivas de estudantes de cursos de Engenharias de uma Instituição pública do ensino superior. Apresentam-se na quarta, que é a última parte deste artigo, as nossas reflexões e considerações finais. Obedecendo esta organização, apresentamos, a seguir, a sua segunda parte que consiste no:

Quadro teórico

Na literatura existe uma multiplicidade de teorias que, evidentemente, são impossíveis de serem utilizadas em uma única pesquisa. Daí a necessidade de constituir um Quadro teórico de base ligado à problemática da pesquisa em tese. Neste contexto, Henriques (2019) traz uma reflexão interessante, quando apresenta a seguinte definição:

> Um quadro teórico é o referencial teórico de base de uma pesquisa, escolhido pelo pesquisador em função da sua problemática, constituído, pelo menos, por uma teoria capaz de fornecer ferramentas de análise aos estudos que pretende desenvolver (Henriques, 2019, p. 37).

Com base nesta definição escolhemos o referencial teórico de base deste artigo constituído pela TAD e a TRRS, com foco nas Integrais Múltiplas como objetos do saber matemático, e nas suas relações institucionais, o qual sintetizamos nesta parte seguindo essa ordem.

A Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Desenvolvida por Chevallard (1992, 2009, ...), essa teoria inscreve-se no prolongamento da teoria da transposição didática também proposta pelo mesmo autor. Trata-se de um referencial que tem se mostrado fundamental nas instituições educativas, ocupando espaço significativo nos Quadros teóricos de várias pesquisas em Didática da Matemática e Educação em geral, nos vários países do mundo inteiro, em particular no Brasil. Desde a sua criação, diversas vertentes, conceitos e percursos metodológicos já se agregaram a esta teoria, impossíveis de serem abordadas em um único artigo, como este. A citar, a ecologia de saberes, a abordagem praxeológica, a Engenharia do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD), o Modelo Praxeológico de Gestão de Tarefas (MPGT), o Modelo T4TEL, a noção de variáveis no modelo praxeológico, o paradigma do questionamento do mundo e a razão de ser de objetos do saber, relações pessoais e institucionais, entre outros conceitos.

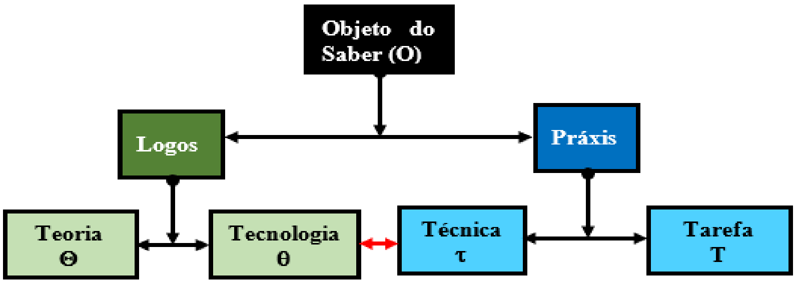
> O ponto de partida desta teoria é a ideia de que "tudo é objeto". O autor distingue, no entanto, os tipos de objetos específicos, a saber: instituições, pessoas e as posições que as pessoas ocupam nas instituições. Ocupando essas posições, essas pessoas tornam-se sujeitos ativos das instituições, que contribuem para a existência das mesmas (Henriques, 2019, p. 51).

Dentre as vertentes, conceitos e metodologias que se agregam a esta teoria, nos restringimos, basicamente neste artigo, a abordagem praxeológica e a MPGT.

> Chevallard propôs a noção de organização praxeológica ou simplesmente praxeologia (como conceito chave) para estudar as práticas institucionais relativas a um objeto do saber, em particular as práticas sociais em Matemática. O autor se propôs a distinguir as praxeologias que podem se constituir em uma sala de aula, onde se estuda este objeto, analisar a maneira pela qual pode se construir o estudo desse objeto e, que pode permitir a descrição, bem como o estudo das condições de realização (Henriques, 2019, p. 57).

Entende-se, portanto, a abordagem praxeológica como um modelo para análise da ação humana institucional, e a praxeologia é uma organização de um objeto do saber em quatro noções, denominadas *Tarefa*, *Técnica, Tecnologia e Teoria*, modeladas conforme mostrado na Figura 2.

Figura 2: Noções do modelo praxeológico de um dado objeto do saber



Fonte: Henriques; Farias; Neves; Funato (2022, p. 112)

É fundamental, em toda formação inicial, independentemente do curso, a apresentação desse modelo aos integrantes/estudantes, porque ele intervém fortemente no modo como estes podem distinguir as praxeologias que vão se construir em sala de aula. Nos cursos de Engenharias dos estudantes envolvidos nesta pesquisa, esse modelo entra como parte da Introdução da Unidade zero (Henriques; Farias; Neves; Funato, 2022) ocupando um espaço significativo e novidade bem vinda para esses estudantes, que nunca tiveram relação pessoal e institucional precedentemente. Cada noção do modelo praxeológico é definido como segue:

Quadro 1: Definições das noções do modelo praxeológico

*Um tipo de **Tarefa**, denotada pela letra **T**, contendo ao menos uma tarefa t, é um exercício, um exemplo*[5] *ou um problema, elaborado com um enunciado em precisão, sem ambiguidades, podendo ou não ser identificado em uma determinada praxeologia.* Cf. Fonte p. 58.
*Uma **Técnica**, denotada pela letra grega **τ**, é uma maneira de realizar uma determinada tarefa de algum tipo **T**.* Cf. Fonte p. 60.
*Uma **Tecnologia**, denotada pela letra teta minúscula **θ**, é um discurso racional (o logos) que tem por objetivo de justificar a técnica **τ**, garantindo que esta permite realizar as tarefas do tipo **T**.* Cf. Fonte p. 61.

[5] Um exemplo é um exercício resolvido na praxeologia dominante do objeto O no qual este exemplo foi elaborado. Todo exemplo é, portanto, tarefa do seu autor em uma obra ou do(a) Professor(a) em sala de aula. Isto é, se o sujeito (seja autor(a) de um livro, seja Professor(a), etc.) enunciar um exemplo, ele tem que resolvê-lo, pois, essa tarefa é deste sujeito (Henriques, 2019, p. 58).

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v2.e2024005 2965-6753

*A **Teoria**, denotada pela letra teta maiúscula* **Θ**, *é um conjunto de regras sistemáticas que constituem um ramo de saberes organizados com discursos racionais que têm a função de justificar e tornar compreensível uma tecnologia θ*. Cf. Fonte p. 61.

Fonte: Henriques (2019)

Essas quatro noções: *tipo de tarefa* (**T**), *técnica* (**τ**), *tecnologia* (**θ**) e *teoria* (**Θ**), definem uma *praxeologia* completa [**T/τ/θ/Θ**] que, conforme ilustrado na Figura 2, se decompõe em dois blocos: [**T/τ**] e [**θ/Θ**], correspondentes ao *saber-fazer* [*práxis*] e ao ambiente *tecnológico-teórico* [*logos*], respectivamente. Essa decomposição tem uma justificativa notável em sala de aula. Pois, os estudantes, mesmo inseridos inicialmente no bloco [*logos*], se restringem fortemente no bloco [*práxis*]. A consequência disso é que nem sempre sabem explicar o que fazem, pois os fundamentos conceituais que lhe favorecem alcançar os resultados, quando alcançam, estão retidos no bloco [*logos*].

Além disso, nas organizações praxeológicas sobreviventes nas IES no cenário do ensino das Integrais Múltiplas, os constructos teóricos que dão vida a esse ensino no bloco [*logos*] nem sempre são transformados em tarefas, suscitando vazios didáticos. Ademais, o efeito topázio é frequente nessas organizações.

No entanto, os geradores de tarefas, além de conduzir o estudante no processo de aquisição de novos conhecimentos a partir de saberes anteriores, tendem a eliminar efeitos topázios específicos que sobrevivem no referido cenário, e valorizam a mobilização de diferentes registros de representação semiótica na realização das tarefas gerenciadas a partir deste modelo que sintetizamos a seguir.

O Modelo Praxeológico de Gestão de Tarefas

O Modelo Praxeológico de Gestão de Tarefas (MPGT) foi elaborado por Henriques (2019) com base no modelo T4TEL (T four TEL) de Chaachoua (2018). Os exemplos apresentados em uma praxeologia, tal como das Integrais Múltiplas (tarefas do autor de uma obra ou Livro Didático (LD), e os exercícios/Problemas propostos, sistematicamente, no final de cada seção da obra), assim como os conceitos que não são transformados em tarefas explícitas nessa obra, podem ser imersos no Modelo Praxeológico de Gestão de Tarefas (MPGT), definido por Henriques (2019, p. 106) como "um exemplar para elaboração de tarefas, que devem iniciar com um gênero (verbo no infinitivo), no contexto praxeológico, seguido de um complemento fixo, e de um Sistema de Variáveis Didáticas".

O referido modelo é apresentado em um quadro contendo um exemplar que deve ser utilizado na prática, em situações efetivas de aprendizagem. Nós reproduzimos o referido modelo no Quadro 2.

Quadro 2: Modelo Praxeológico de Gestão de Tarefas (MPGT)

<table>
<tr><th colspan="3">GT = [Verbo de ação, complemento fixo, SVD]</th></tr>
<tr><td colspan="3">Em que:
❖ GT: significa geratriz ou gerador de tarefas.
❖ Verbo de ação: define o gênero do tipo de tarefa T.
❖ Complemento fixo: especifica um enunciado, sem ambiguidades, fixando os dados ou informações globais da situação ou tarefa que devem ser utilizadas no SVD ou subtarefas.
❖ SVD: é um sistema de variáveis didáticas no gerador de tarefas (t).</td></tr>
<tr><th colspan="3">Um exemplar de GT</th></tr>
<tr><td rowspan="5">GT1</td><td colspan="2">Considerar as informações I1, I2, I3, ..., In para realizar as seguintes tarefas:</td></tr>
<tr><td>t1</td><td>Enunciado da t1 utilizando alguma informação In</td></tr>
<tr><td>t2</td><td>Enunciado da t2 utilizando alguma informação In e/ou resultado da t1</td></tr>
<tr><td>t3</td><td>Enunciado da t3 utilizando alguma informação In e/ou Resultado da t1, t2</td></tr>
<tr><td>..</td><td>...</td></tr>
</table>

Fonte: Henriques (2019, p. 106)

Na aplicação deste modelo no ensino, constatamos que uma vez fixado o complemento, enquanto elemento que especifica um enunciado sem ambiguidade, é possível conduzir os estudantes na leitura, na análise e na realização de diferentes tarefas (t1, t2, t3,...) mobilizando-se conceitos anteriormente adquiridos e os novos em diferentes registros de representação semiótica. Daí a importância de apresentar essas teorias, mesmo que seja, sucintamente, para os estudantes no âmbito da Unidade zero (Henriques; Farias; Neves; Funato, 2022). Assim, antes de aplicarmos esse modelo, convém estudarmos um pouco a teoria do francês Raymon Duval como segue.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS)

É de consenso em Didática que na Matemática os objetos não são acessíveis ao menos que seja por suas representações. Essa interessante frase nasce na Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS), proposta por Duval (1995). Trata-se de uma teoria que tem se mostrado muito útil na qualificação de recursos humanos, ocupando espaço significativo nos Quadros teóricos utilizados por vários pesquisadores em Didática, Educação em Ciências e Matemática no mundo inteiro. Junto desta reflexão, destaca-se que:

> O autor [Duval] trouxe contribuições significativas no campo educativo, tanto no ensino quanto na pesquisa [bem como na extensão universitária], tornando explícitos os conhecimentos que até então eram ou ainda são tratados implicitamente, sem que sejam evocados. Quando as noções não são evocadas, elas podem passar despercebidas no processo de aquisição de conhecimentos, deixando vazios

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v2.e2024005 2965-6753

> didáticos[6] na conceitualização (Henriques; Almouloud, 2016, p. 147).

Esses autores acrescentam ainda que:

> Por mais simples que sejam, as noções devem ser evocadas durante o seu tratamento [...] para garantir a consolidação da aprendizagem. Nesse tratamento, dois termos não devem ser confundidos, a saber: *objeto* e *representação*. Para Duval (1998, p. 140), "as relações existentes entre os dois termos são as noções centrais para toda a análise do conhecimento". (Op. Cit, p. 467)

Evocar as noções visadas no processo de aquisição de conhecimentos é, portanto, uma atitude inteligente no tratamento de objetos do saber. Colocando-nos, particularmente no cenário do ensino das Integrais Múltiplas, constatamos que neste ensino são requeridos ao estudante o conhecimento de diversos objetos matemáticos e as suas representações para a compreensão dos conceitos correspondentes, mobilizando-se diferentes registros semióticos. No entanto, essa mobilização nem sempre é evocada e nem julgada como requisito na apreensão conceitual, pois é valorizada a tarefa de calcular a integral. Com efeito, Duval (1993, p. 38) sustenta que "existe um paradoxo cognitivo do pensamento matemático: de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos pode ser apenas uma apreensão conceitual e, de outro lado, só por meio de representações semióticas é que uma atividade sobre objetos matemáticos é possível". Mas, o que é representação semiótica?

> A representação semiótica é uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. A sua significação é determinada, de um lado, pela sua forma no sistema semiótica e, de outro lado, pela referência do objeto representado (Henriques; Almouloud, 2016, p. 147)

Três termos importantíssimos, emergem nessa definição, a saber: (1) "sistema de sinais", (2) forma e (3) referência. Como descrito, mais adiante, o primeiro termo remete-nos ao registro de representação semiótica. O segundo e o terceiro termo, ativam o significado ou contexto que deve ser mobilizado pelo sujeito/estudante durante a representação do objeto em questão, em dados registros de representação semiótica.

> O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros de representação semiótica. Se é chamada "**semiose**" a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e "**noesis**" a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a **noesis** é inseparável da **semiose** (Duval, 2012, p. 270).

Entendemos, portanto, que a **semiose** é a produção de uma representação semiótica, e

[6] **Vazio didático** é a existência de saberes em torno de um objeto de conhecimentos que não são mobilizados pelo sujeito e compromete o ensino correspondente, bem como a realização efetiva de situações-problemas ou tarefas concernentes.

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v2.e2024005 2965-6753

a **noesis** é a apreensão conceitual de um objeto. Além disso, o autor afirma que não há **semiose** sem a **noesis**. Ambos conceitos são inseparáveis. Ou seja, é praticamente impossível construir uma representação semiótica de um objeto sem a sua apreensão conceitual. Por exemplo, os resultados apresentados na Figura 3 (a) e (b), não seriam, conscientemente, possíveis sem a apreensão dos conceitos de sólido[7] e de crivos[8] de superfícies restritas aos sólidos, em Geometria Espacial e; ou Analítica.

Figura 3: Sólido e planificação de crivos restritos

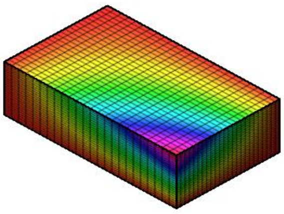


Fig.3(a) Paralelepípedo enquanto sólido

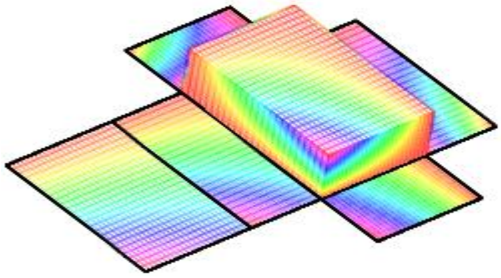


Fig.3(b) Planificação das faces [crivos restritos] do paralelepípedo sobre o plano_*xy*.

Fonte: Henriques (2021, p. 127 e p. 129)

O autor sustenta, portanto, que:

> Não se pode planificar um sólido, e sim os crivos das superfícies que o delimitam. A concepção de planificar um sólido, difundida na literatura é, portanto, um entendimento equivocado, e deve ser eliminada nos conhecimentos da nova geração (Henriques, 2021, p. 129)

Na Figura 3(a) e 3(b), nos referimos a representação do sólido paralelepipédico e a planificação de seus crivos restritos, respectivamente, no registro gráfico. Segundo Duval (2012, p. 271), "para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas a **semiose**". Tais atividades são: (1) A *formação de uma representação identificável*; (2) O *tratamento* e (3) A *conversão*.

A **formação** de uma representação semiótica é uma construção baseada na aplicação de regras de conformidade e na seleção de certas características do conteúdo envolvido (Henriques; Almouloud, 2016, p. 267). Por exemplo: a elaboração de um enunciado no registro da língua materna é uma **formação** de uma representação identificável. Nessa formação pode-

[7] Um **sólido** é toda a região tridimensional de fronteira **S**, constituída de uma quantidade finita de crivos de superfícies lisas, que se intersectam em uma quantidade finita de arestas (crivos de curvas). Estas, por sua vez, podem se interceptar em uma quantidade finita de ternos (pontos que são vértices/extremidades das arestas).

[8] Ler sobre crivos em Henriques, Nagamine e Serôdia em https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/44263 acessado em 11/12/2023.

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v2.e2024005 2965-6753

se utilizar o MPGT como segue:

Quadro 4: Gerador de tarefas contendo duas tarefas propostas aos estudantes.

<table>
<tr><td rowspan="3">Gerador de Tarefas GT1</td><td colspan="2">Considerar as curvas C1 e C2 de equações dadas por $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2$, respectivamente, para realizar as seguintes tarefas, explicando cada etapa de realização: $z = \pm\sqrt{21}$</td></tr>
<tr><td>t1</td><td>Descrever cada equação na língua materna</td></tr>
<tr><td>t2</td><td>Representar, no registro gráfico, o crivo restrito de C1 e de C2 a uma região finita do plano_xy.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaboração própria dos autores

Observando este GT1, podemos constatar, como sublinhado pelo Duval (2012) que:

> A formação implica a seleção de relações e de dados no conteúdo a representar. Esta seleção se faz em função de unidades e de regras de formação que são próprias do registro cognitivo no qual a representação é produto (Duval, 2012, p. 271).

As referidas regras de formação ou equivalentemente as regras de conformidade "são regras a respeitar na formação de uma representação semiótica, tais como as regras gramaticais quando se trata de línguas maternas, as regras de representação gráfica, as regras de cálculos numéricos" (Henriques; Almouloud, 2016, p. 268).

Duval (2012, p. 272) afirma que "o **tratamento** de uma representação é a transformação dessa representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro". A realização da segunda tarefa (t2) do GT1, por exemplo, requer um tratamento próprio nos registros algébrico e gráfico, como se pode observar na Figura 4.

Figura 4: Exemplo de tratamento de equações e suas curvas nos registros algébrico e gráfico

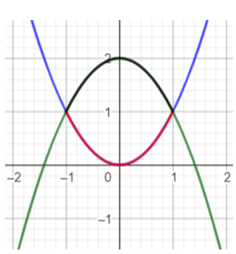
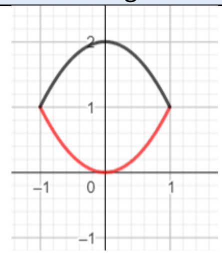
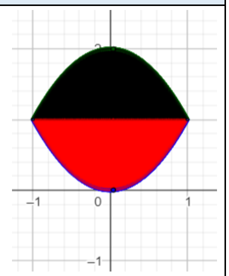
<table>
<tr><td colspan="2">Tratamento no Registro Algébrico</td><td colspan="3">Tratamento no Registro Gráfico</td></tr>
<tr><td colspan="2">De $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2$, tem-se que:
$y = y \Longrightarrow x^2 = -x^2 + 2 \Longrightarrow 2x^2 = 2$
Ou equivalentemente
$x^2 = 1 \;\Longrightarrow x = \pm 1.$</td><td rowspan="2">
Curva C1 e C2</td><td rowspan="2">
Crivo de C1 união C2 restritos a região R</td><td rowspan="2">
Região finita R</td></tr>
<tr><td>Parametrização do Crivo de C1 restrito a região finita do plano.
$\mathrm{CrC1} = \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$
para $-1 \leq t \leq 1$</td><td>Parametrização do Crivo de C2 restrito a região finita do plano.
$\mathrm{CrC2} = \begin{cases} x = t \\ y = -t^2 + 2 \end{cases}$
para $-1 \leq t \leq 1$</td></tr>
</table>

Fig.4(a) Tratamento de crivos de C1 e de C2 restritos a uma região finita do plano_*xy,* no registro algébrico

Fig.4(b) Tratamento de crivos de C1 e de C2 restritos a uma região finita do plano_*xy,* no registro gráfico

Fonte: produção própria dos autores.

A **conversão** de uma representação é a transformação dessa representação em uma representação de outro registro (Henriques; Almouloud, 2016, p. 269). Na Figura 4, a passagem de representações das equações $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2$ (Figuras 4(a)) para as representações das curvas C1 e C2 correspondentes (Figuras 4(b)) é uma conversão desses objetos do registro algébrico para o registro gráfico.

Atenção: as equações $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2$ não são registros, assim como as curvas C1 e C2 não são, elas são, representações dos saberes munidas de **semiose** (produção das representações semióticas), mediante a mobilização de **noesis** (a apreensão conceitual dos objetos), que neste caso, as equações e as funções do segundo grau. Portanto, como sustentado por Duval, "não há **semiose** sem a **noesis**". Mas, então, o que é registro de representação? "Um registro de representação é um sistema dotado de signos que permitem identificar uma representação de um objeto de saber" (Henriques; Almouloud, 2016, p. 269). Esses autores sustentam que,

> A escolha de um registro de representação adequado para externar os conceitos de um objeto de saber pode favorecer o tratamento. No entanto, Duval (1995) afirma que dispor de vários registros de representação não é suficiente para garantir a compreensão. Uma segunda condição é necessária: a coordenação de representações formuladas em registros distintos. A **coordenação** é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos (Henriques; Almouloud, 2016, p. 270).

Entendemos, portanto, que saber representar um dado objeto nos diferentes registros, não é suficiente para a consolidação do conhecimento em torno desse objeto, é necessária a **coordenação**, sendo esta, uma condição fundamental para todo tipo de aprendizagem. De fato, no cenário do ensino das Integrais Múltiplas (IM), por exemplo, certos estudantes fazem corretamente a leitura de tarefas e realização em diferentes registros. Mas, na maioria dos casos, nem sempre sabem explicar os tratamentos e conversões que produzem. Quatro registros de representação semiótica, são predominantes nesse cenário, sendo os registros apresentados por (Henriques; Almouloud, 2016, p. 468), indicados na Figura 5.

Figura 5: Registros de representação semiótica predominante no ensino das IM

Fonte: Henriques; Almouloud (2016, p. 468).

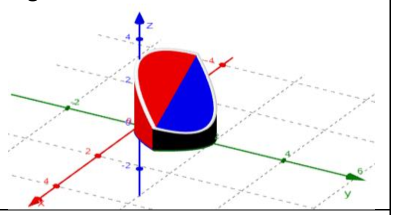
De fato, o Gerador de Tarefas um (GT1) considerado anteriormente, gerando duas tarefas (t1) e (t2), permite a gestão de tantas outras tarefas quanto se queira no referido senário. As duas primeiras tarefas, mostraram a mobilização dos registros Algébrico e Gráfico. Mas, como sublinhado, outras podem emergir do GT1, tais como: (t3) descrever dada equações fornecida

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v2.e2024005 2965-6753

no GT1 na língua materna. (t4) Fornecer o espaço tridimensional Q limitado inferiormente pela região R obtida na realização da (t2), superiormente pelo crivo do gráfico da função *f* restrito a *Q*, e lateralmente pela **S**uperfícies **e**manada da **f**ronteira de R ao gráfico de ***f*** (**Seff**). (t4) Representar o sólido *Q*, analiticamente, no registros algébrico. (t6) Calcular a integral da função *f* sobre *R*, ou equivalentemente calcular o volume de *Q*.

Quadro 5: Realização possível de cada tarefa do GT1

<table>
<tr>
<td>Para realizar a t3 é suficiente afirmar que $y = x^2$ é a equação da curva denominada parábola com vértice na origem de sistema de coordenadas, côncava para cima ao longo do eixo_y.

Ao passo que $y = -x^2 + 2$, é a equação da curva denominada parábola com vértice na ponto (0,2), côncava para a baixo ao longo do eixo_*y*.</td>
<td>Para realizar a t4, deve-se levar em consideração o resultado obtido na realização da t1, e aplicar o axioma de especificação[9] para o conjunto Q. Ou seja, considerar a estrutura:
$Q = \{(x, y, z) \in R^3;\ (x, y) \in R, 0 \leq z \leq 3 - x - y\}$
Em que a região R é dada analiticamente, no registro algébrico, por:
$R = \{(x, y) \in R^2; -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq x \leq 2 - x^2\}$</td>
<td>Para realizar a t5, deve-se, inicialmente, introduzir o sistema de coordenadas cartesianas tridimensional. Representar a região R, a sua imagem pela função *f*, e finalmente a Seff. Pode-se utilizar um ambiente computacional para obter o resultado como mostrado na Figura abaixo.
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Para realizar a t6, deve-se, inicialmente estabelecer a integral dupla, utilizando-se dos resultados obtidos na realização das tarefas anteriores. Assim, tendo conhecimento da representação geral da referida integral por
$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx$ ou $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dxdy$
Deve-se observar o tipo da região *R*. Conceitualmente, a primeira representação é a indicada. Segue-se, portanto, que a integral dupla a calcular admite a seguinte representação:
$$\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{2-x^2} (3 - x - y)dydx$$
Sendo $f(x, y) \geq 0$ em R, essa integral é também o volume de Q. Calculando a primitiva do integrando $(3 - x - y)$ em relação a variável *y*, e aplicando a segunda parte do Teorema Fundamental de Cálculo (TFC), obtém-se o resultado apresentado no segundo membro da seguinte equação:
$$\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{2-x^2} (3 - x - y)dydx = \int_{-1}^{1} \left(3y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg]_{x^2}^{2-x^2} dx$$
Desenvolvendo a aplicação da segunda parte do TFC, obtemos:
$$\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{2-x^2} (3 - x - y)dydx = \int_{-1}^{1} \left\{\left((3 - x)(2 - x^2) - \frac{(2 - x^2)^2}{2}\right) - \left((3 - x)(x^2) - \frac{(x^2)^2}{2}\right)\right\} dx$$
Realizando, conscientemente, o devido tratamento algébrico do integrando, isto é, simplificando a expressão $\left((3 - x)(2 - x^2) - \frac{(2-x^2)^2}{2}\right) - \left((3 - x)(x^2) - \frac{(x^2)^2}{2}\right)$, obtêm-se $4 - 2x - 4x^2 + 2x^3$, segue-se, portanto que:
$$\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{2-x^2} (3 - x - y)dydx = \int_{-1}^{1} (4 - 2x - 4x^2 + 2x^3)dx$$
Calculamos, em seguida, a primitiva do integrando $(4 - 2x - 4x^2 + 2x^3)$ em relação a variável *x*, e aplicamos a segunda parte do TFC, obtendo o resultado apresentado no segundo membro da seguinte equação:</td>
</tr>
</table>

[9] Para todo conjunto A e toda condição S(*x*) corresponde um conjunto B cujos elementos são exatamente aqueles elementos *x* de A para os quais S(*x*) é válido. (HALMOS, 2001, p.10).

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{2-x^2}(3-x-y)dydx = \left(4x - x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^4}{2}\right)\Bigg]_{-1}^{1} = \frac{16}{3}$$

Desenvolvendo a aplicação da segunda parte do TFC, conclui-se que:

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{2-x^2}(3-x-y)dydx = \frac{16}{3}$$

Fonte: Produção própria dos autores.

O desenvolvimento cognitivo de saberes sobre o ensino e aprendizagem das Integrais Múltiplas não deve, portanto, ser reduzido a calcular a integral. Os diversos conceitos que sustentam a sobrevivência desse objeto do saber podem ser potencializados mediante a mobilização de diferentes registros de representação, a partir da gestão de tarefas. Mas, essa gestão nem sempre é objeto de estudo nas IES, consequentemente, os estudantes se veem diante de desafios, quando se deparam com essa gestão.

Vale salientar que os elementos básicos que compõem cada uma das teorias deste Quadro foram objetos de estudos apresentados à turma dos estudantes envolvidos nesta pesquisa, como componentes preliminares que fornecessem embasamentos teóricos para a reflexão dos estudantes em todas as unidades didáticas de avaliação programadas pelo Professor da disciplina. Tal apresentação ocorre na Unidade zero. Sublinhamos ainda que a valorização de tarefas no contexto matemático é uma concepção comum nas pesquisas educacionais que se preocupam com as práticas efetivas de estudantes em sala de aula. Segundo Cyrino; Jesus (2014) cita em Milhomen, Andrade, Bomfim e Neves (2023) "a Tarefa Matemática funciona como uma ferramenta no processo de ensino e aprendizagem da matemática que pode ou não desencadear potencialidades". No caso das Integrais Múltiplas, tais potencialidades têm raízes genuínas nos adquiridos nos Cálculos (CDI I, CDII) anteriores a CDI III, e por que não em Geometria Analítica.

Metodologia

Como sublinhado anteriormente, a pesquisa base deste artigo, segue a metodologia de Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD) organizada em oito etapas, desenvolvidas em dois momentos denominados Pesquisa Interna e Pesquisa Externa Henriques (2016, 2018, 2019). Nessa última, nos restringimos na aplicação e na análise a posteriori de tarefas elaboradas no cenários das IM aplicadas aos estudantes utilizando o ambiente papel/lápis, visando responder o questionamento apresentado neste artigo. Assim, análises subsequentes que constituem a quarta parte prevista neste artigo, concedem-nos um espaço propício de coleta de dados e aquisição de respostas do referido questionamento.

Práticas efetivas de estudantes em cursos de engenharias

Baseados nas análises realizadas nas seções anteriores do presente artigo, utilizamos os trabalhos de um Professor de Cálculo Diferencial Integral III (CDI III) em uma das suas turmas ofertadas segundo semestre de 2023, em uma Universidade pública do estado da Bahia (Brasil), para estudantes de engenharias, onde os estudantes já tenham cursado a Geometria Analítica, estabelecem relações, inicialmente, com as Integrais Duplas, seguidas pelo estudo das Integrais triplas, terminando a disciplina com a aprendizagem do teorema de Stokes e as suas aplicações. Nas suas avaliações, o Professor utiliza o Modelo Praxeológico de Gestão de Tarefas (MPGT) do qual trazemos um recorte de uma de suas avaliações que reproduzimos no Quadro 6, contendo dois GT, formado com quatro tarefas em cada.

Quadro 6: Reprodução de geradores de tarefas utilizados em uma avaliação de CDI III em 2023.2

Gerador de tarefas GT2	Considerar a região R do plano_*xy* delimitada pelos crivos de curvas de equações dadas por $y = x$, $y = 4$ e $y = -x$, explicando cada etapa de realização.	
	t1	Descrever, na língua materna, a região *R* considerada no GT2.
	t2	Representar a região *R* no registro gráfico e analiticamente no registro algébrico.
	t3	Calcular a medida da área da região R por integrais duplas.
	t4	Calcular a integral dupla da função *f* dada por $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2}$ sobre a região R.
	t5	Fornecer uma interpretação geométrica da integral calculada na realização da t4.

Gerador de tarefas	Considerar o espaço tridimensional Q interior e exterior as superfícies de equações dadas por $3x^2 + 3y^2 + z^2 = 28$, e $x^2 + y^2 = 4$, explicando cada etapa de realização.	
	t1	Descrever, na Língua Materna, cada equação considerada no GT3.
	t2	Representar, no registro gráfico, o espaço tridimensional *Q* considerado no GT3.
	t3	Representar o espaço tridimensional *Q*, analiticamente, no registro algébrico.
	t4	Utilizar uma integral dupla em coordenadas polares para calcular o volume de ***Q***.

Fonte: Avaliação proposta por um Professor em um curso de CDI sobre Integrais Duplas.

Os Geradores de Tarefas (GT), assim elaborados, favorecem a gestão e transformação de conceitos em tarefas, a exemplo de “Descrever, na Língua Materna, cada equação considerada no GT2.”, sendo, portanto, um caminho propício para o acesso às práticas efetivas de estudantes. Apesar das equações presentes nas organizações praxeológica das Integrais Múltiplas, serem a priori familiares pelos estudantes a partir do ensino da Geometria Analítica (GA), a abordagem ou representações, no próprio registro algébricos, têm as suas especificidades que nem sempre são identificadas imediatamente pelos estudantes. Exemplo, os estudantes nem sempre conseguem entender a equação dada por $3x^2 + 3y^2 + z^2 = 28$ como proveniente da representação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, para $a \neq 0, b \neq 0$ e $c \neq 0$, que estudaram em GA como a equação da superfície elíptica (ou elipsóide) centrada na origem do sistema de coordenadas tridimensional, cujos os eixos são avalizados em conformidade com os valores assumidos por *a*, *b*, e *c*. No caso da equação $3x^2 + 3y^2 + z^2 = 28$ cuja representação correspondente no indicada na Figura 6(a), exprime-se que o eixo maior é crivo do eixo_*z*.

Além disso, apesar do GT2 e GT3 se referirem ao conceito de equações, existem em cada gerador um conceito complementar que diferencia uma situação da outra. Mesmo assim, os estudantes se veem diante de desafios na leitura e interpretação dos geradores. A dualidade gerada pela equação do tipo $x^2 + y^2 = a^2$, tem sido controlada pelo contexto de curva e de superfície. Para curvas, essa equação consiste na circunferência de raio um traçada no registro gráfico, conforme mostrado na Figura 6(c). Ao passo que para superfícies, essa mesma equação remete à representação de um crivo da superfície cilíndrica de raio um, ao longo do eixo_z, indicado na Figura 6(d).

Figura 6: Representação de equações de curvas e de superfícies no registro gráfico

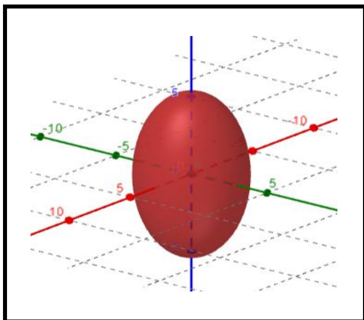
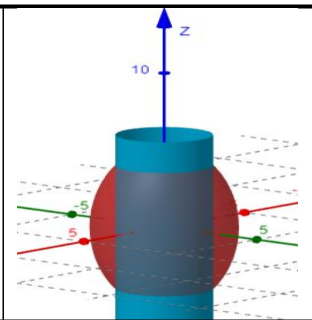
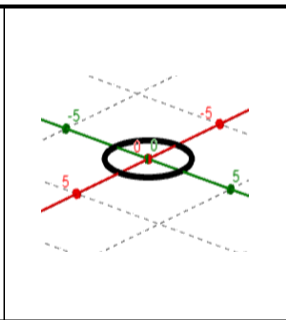
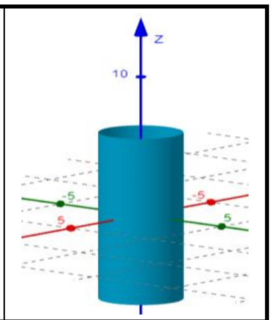
			

Fig.6(a) Elipsóide Ou Superfície elíptica de equação $3x^2 + 3y^2 + z^2 = 28$	Fig.6(b) Elipsóide e Crivo de Superfície cilíndrica	Fig.6(c) Circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$ no plano_*xy*	Fig.6(d) Crivo de Superfície cilíndrica de equação $x^2 + y^2 = 4$

Fonte: Produção própria dos autores na análise a priori.

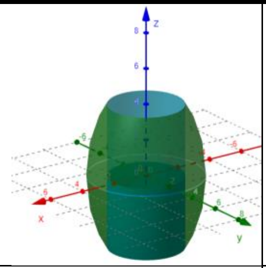
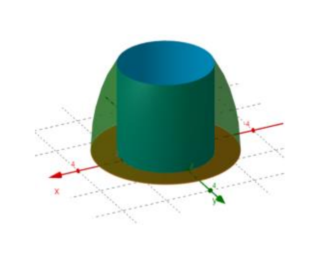
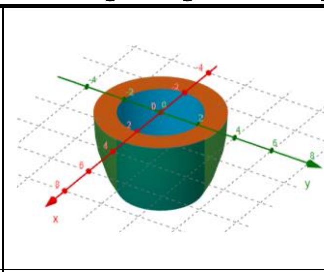
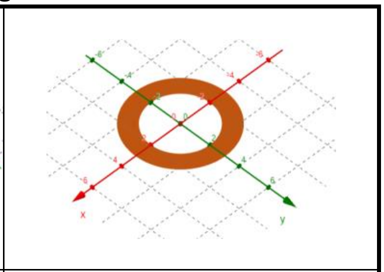
A representação requerida na t2 do GT2, no entanto, exige mais do estudante, não apenas o reconhecimento de cada superfície, mas também, os novos objetos geométricos que estas superfícies geram quando interagem entre si, e as suas relações com os conceitos exigidos na praxeologia das Integrais Múltiplas, tais como: domínio de integração, limites de integração, função da integral, ordem de integração, tipos de regiões de integração, etc. Com efeito, o tratamento de representações nos registros algébrico e gráfico é uma condição cognitiva fundamental para que ocorra um sucesso na aprendizagem da IM. A representação conjunta de

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v2.e2024005 ISSN 2965-6753

superfície indicada na Fig.6(a) com a Fig.6(b) no mesmo sistema, ver Fig.6(b), considerando as informações apresentadas no GT3, sugere o possível tratamento que podemos observar na Figura 7.

Logo o contexto, o significado e a interpretação exercem um papel fundamental na leitura de geradores de tarefas elaborados no cenário do ensino das IM, e as suas realizações pelos estudantes.

Figura 7: Visualização do sólido Q e as suas partes úteis na resolução de tarefas subsequentes. Tratamento de superfícies no registro gráfico e algébrico

			
Tratamento possível de equações de superfícies no registro algébrico $3x^2 + 3y^2 + z^2 = 28$ $3(x^2 + y^2) + z^2 = 28$ De $x^2 + y^2 = r^2$, tem-se que $3r^2 + z^2 = 28$ $z = \pm\sqrt{28 - 3r^2}$	Para o crivo de Elipsóide $\begin{cases} x = r.\cos(t) \\ y = r.\text{sen}(t) \\ z = \sqrt{28 - 3r^2} \end{cases}$, sendo $2 \le r \le \frac{\sqrt{28}}{3}, 0 \le t \le 2\pi$ Para o crivo se S. Cilíndrica $\begin{cases} x = 2.\cos(t) \\ y = 2.\text{sen}(t) \\ z = w \end{cases}$, sendo $0 \le t \le 2\pi, 0 \le w \le 4$	Para o crivo de Elipsóide $\begin{cases} x = r.\cos(t) \\ y = r.\text{sen}(t) \\ z = -\sqrt{28 - 3r^2} \end{cases}$, sendo $2 \le r \le \frac{\sqrt{28}}{3}, 0 \le t \le 2\pi$ Para o crivo se Sup. Cilíndrica $\begin{cases} x = 2.\cos(t) \\ y = 2.\text{sen}(t) \\ z = w \end{cases}$, sendo $0 \le t \le 2\pi, -4 \le w \le 0$	Domínio de integração $\boldsymbol{R} = \left\{(r,t)\epsilon R^2; 2 \le r \le \sqrt{\frac{28}{3}}, 0 \le t \le 2\pi\right\}$ Parametrização de R para a representação no registro gráfico $\begin{cases} x = 2.\cos(t) \\ y = 2.\text{sen}(t) \\ z = 0 \end{cases}$, sendo$2 \le r \le \sqrt{28/3}, 0 \le t \le 2\pi$
Fig.7(a) Sólido Q	Fig.7(b) Hemisférico norte de Q	Fig.7(c) Hemisférico Sul de Q	Fig.7(d) Região de integração

Fonte: Produção própria dos autores na perspectiva de análise a priori.

Assim, o espaço tridimensional Q pode ser representado analiticamente, em coordenadas cilíndricas, por $Q = \{(r,t.z)\epsilon R^3, (r,t)\epsilon\, \boldsymbol{R}, -\sqrt{28-3r^2} \le z \le \sqrt{28-3r^2}\}$. Espera-se, portanto, na realização da t4 do GT3, o estabelecimento da seguinte integral:

$$\int_0^{2\pi}\int_2^{\sqrt{28/3}} f(r,t)rdrdt \text{ ou } \int_2^{\sqrt{28/3}}\int_0^{2\pi} f(r,t)rdtdr \text{ onde } f(r,t) = \sqrt{28-3r^2}$$

Pelo teorema de Fubini, qualquer dessas representações conduz ao mesmo resultado. Considerando a segunda, espera-se uma produção como indicado no Quadro 7:

Quadro 7: Possível produção esperada nas práticas efetivas de estudantes

$ID = \displaystyle\int_2^{\sqrt{28/3}}\int_0^{2\pi} r\sqrt{28-3r^2}dtdr$	Calculando a primitiva do integrando $r\sqrt{28-3r^2}$ em relação a t e aplicando a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo $\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b$, temos ⬋:
$= \displaystyle\int_2^{\sqrt{28/3}} \left(r\sqrt{28-3r^2}\right)t\Big]_0^{2\pi} dr$	Desenvolvendo a aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo $\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b$. Isto é, fazendo $F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ obtemos ⬋:
$= 2\pi \displaystyle\int_2^{\sqrt{28/3}} r\sqrt{28-3r^2}dr$	Obs.: Nesta etapa, o integrando sugere a mudança de variável: $u = 28 - 3r^2$, sendo $du = -6rdr$. Ou equivalentemente $rdr = -\frac{du}{6}$. Além disso, para $r = 2 \rightarrow u = 16$. Para $r = \sqrt{28/3} \rightarrow u = 0$. Substituindo esses dados na integral, tem-se⬋:

$=\frac{\pi}{3}\int_0^{16}\sqrt{u}dr$	Calculando a primitiva do integrando $\sqrt{u}$ em relação a u e aplicando a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) $\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b$, temos ↙:
$=\frac{\pi}{3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\right)\Big]_0^{16}$	Desenvolvendo a aplicação do TFC. Isto é, fazendo $F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, obtemos ↙:
$=\frac{2\pi}{9}\sqrt{16.16^2}$	Realizando o devido tratamento numérico, obtém-se: $ID = \frac{128}{9}\pi$. Logo pela simetria do espaço Q em relação ao plano_*xy*, conclui-se que o volume V_Q de Q é ↙:
$V_Q = 2 \cdot ID = 2 \cdot \int_2^{\sqrt{\frac{28}{3}}}\int_0^{2\pi} r\sqrt{28-3r^2}dtdr = \frac{256}{9}\pi$	

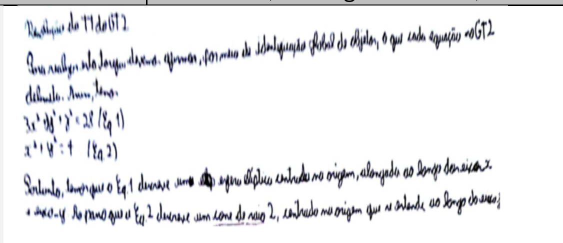
Fonte: Produção própria dos autores na perspectiva de análise a priori.

Mas, então, o que é que os estudantes fazem diante dessa avaliação? Ou seja, quais são as práticas efetivas dos estudante em CDIIII? É isso que veremos a seguir.

A análise das práticas efetivas de estudantes

A avaliação do Professor de CDI III contendo os dois geradores de tarefas apresentados no Quadro 6 foi aplicada a uma turma de dez estudantes de cursos de Engenharias: Civil; Elétrica e Mecânica) matriculados na disciplina CDI III, no segundo semestre de 2023, em uma Universidade pública do Estado da Bahia, Brasil. Embora a avaliação do Professor contenha dois geradores importantes, dentre os dados coletados, trazemos apenas recortes de manuscritos de três estudantes que identificamos com nomes fictícios de Pedro, Antônio e Alice, referentes ao GT3 (numeração neste artigo). Na nossa análise retomaremos cada tarefa indicando o respectivo gerador, seguida dos manuscritos dos estudantes e das nossas reflexões a partir das suas práticas efetivas. Para começar, vejamos, no Quadro 8, as respostas dos estudantes diante da primeira tarefa do GT3.

Quadro 8: Respostas do Pedro, do Antônio e de Alice sobre a t1 do GT3

t1 do GT3	Descrever, na Língua Materna, cada equação considerada no GT3.	
Pedro		**Transcrição** (pois, esse manuscrito de Pedro está ilegível aqui)! Resolução da t1 do GT3 Para realizar esta tarefa devemos afirmar por meio de identificação global do objeto, o que cada equação ao GT2 delimita. Assim, temos $3x^2 + 3y^2 + z^2 = 28$ (Eq1) $x^2 + y^2 = 4$ (Eq2) Portanto, temos que o Eq1 descreve esfera elíptico centrada na origem, alargada ao longo do eixo_*x* e eixo_y. Ao passo que Eq2 um cone de raio 2, centrado na origem que se estende ao longo do eixo_z.

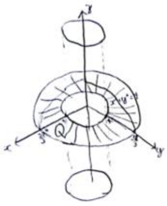
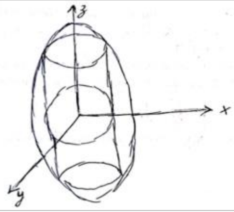
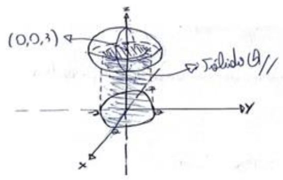
Antônio	Resolução da T_1 da GT2: - Vamos descrever na linguagem materna cada equação considerada em GT2. Ou seja, descrever a equação $3x^2+3y^2+z^2=28$ e a equação $x^2+y^2=4$ (I) $3x^2+3y^2+z^2=28$ - É uma equação de superfície elipsoidal no R3 (espaço tridimensional), onde a largura é maior nos eixos x e y, enquanto a altura é maior ao longo do eixo z. Esta centrada na origem (0,0,0) e a constante 28 na equação, representa a soma dos quadrados dos comprimentos dos semi-eixos x, y e z. (II) $x^2+y^2=4$ - A equação em questão representa um cilindro circular no R3 (espaço tridimensional), Independente da coordenada z, os pontos que satisfazem a equação formam no plano xy um círculo de raio 2. E o cilindro se estende infinitamente ao longo do eixo z.
Alice	• Resolução da t_1 do GT2: Para resolver esta tarefa, isto é, descrever, na língua materna, cada equação considerada no GT2, devemos inicialmente afirmar que $x^2+y^2=4$ é a equação no plano-xy de uma circula centrado na origem onde ela tem raio 2, posteriormente temos a equação $3x^2+3y^2+z^2=28$ é a superfície esférica de raio $=\frac{28}{3}$, no ponto (0,0,3).

Fonte: Recortes de manuscritos de estudantes sobre avaliação de Integrais Duplas

A leitura dos manuscritos dos estudantes permite ver a existência de diversos conflitos conceituais, tais como a relação entre sólido e superfície, quando o Antônio entende $x^2+y^2=4$, como equação de “cilindro”, ao invés de “superfície cilíndrica”. Ora, os sólidos não têm equações. Em outras palavras, os sólidos não são representados por equações, no registro algébrico, e sim por inequações. Idem para o estudante Pedro quando nos revela que $3x^2+3y^2+z^2=28$ descreve “esfera elíptica”, ao invés de superfície esfera elíptica. A estudante Alice, por sua vez, nos informa que a equação $3x^2+3y^2+z^2=28$ é de uma superfície esférica de raio $\frac{28}{3}$. Superfície, sim, mas esférica assim isolada, e ainda mais de raio $\frac{28}{3}$. Pois, $\frac{28}{3}$ não é raio. Podemos então conjecturar que a comunicação escrita, ou seja, a descrição dos objetos visados nas tarefas propostas aos estudantes serve, além forçar uma tentativa de entendimento sobre a maneira como os estudantes pensam, revela os erros conceituais que sobrevivem na formação inicial dos estudantes. Percebemos com isso que estes estudantes, mesmo já tendo passado em Geometria Analítica, nem sempre tem uma formação estável sobre os conceitos apresentados naquela disciplina. Essa dificuldade também é notável na conversão dessas equações para as representações correspondentes nos registros gráficos, como podemos observar nos seus manuscritos referente a realização da t2 do GT3 apresentados no Quadro 9.

Quadro 9: Respostas de Pedro, Antônio e Alice sobre a t2 do GT3

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v2.e2024005 2965-6753

T2 do GT3	Representar, no registro gráfico, o espaço tridimensional *Q* considerado no GT3.
Pedro	Resolução do T2 do GT2. Para realizar esta tarefa, devemos inicialmente introduzir o SCCT e após isso, utilizando os dados obtidos na realização do T1 do GT2 e os dados do GT2, representar as superfícies delimitadas pelas equações Eq.1 e Eq.2 
Antônio	- A equação $3x^2+3y^2+z^2=28$ representa uma superfície elipsoidal no espaço tridimensional. Centrada na origem (0,0,0). Sendo que a constante 28 na equação controla o tamanho e a forma da elipsoide. - A equação pode ser reescrita como: $\frac{x^2}{\frac{28}{3}}+\frac{y^2}{\frac{28}{3}}+\frac{z^2}{28}=1$. Assim temos os semieixos nos eixos x, y, z dados por respectivamente $\sqrt{\frac{28}{3}}, \sqrt{\frac{28}{3}}$ e $\sqrt{28}$ 
Alice	· Resolução do t2 do GT2: Para resolver esta tarefa, isto é, representar, no registro gráfico, o espaço tridimensional Q considerado no GT2, devemos inicialmente introduzir o sistema de coordenadas tridimensional, onde em seguida iremos representar as equações dadas, onde essas irão representar o espaço Q, onde aplicando isso, temos: 

Fonte: Recortes de manuscritos de estudantes sobre avaliação de Integrais Duplas.

Os resultados apresentados pelos três estudantes têm uma certa relação com as representações esperadas no registro gráfico. Todavia, podemos observar que o tratamento que cada estudante apresenta não lhes ajudam muito no trabalho efetivo ao longo do processo heurístico. Eles não entendem que os geradores de tarefas favorecem uma organização praxeológica que conduz um trabalho heurístico que culmina na representação eficaz da integral. Pois, uma vez que as tarefas precedentes t1, t2, e t3 sejam realizadas com sucesso, o estabelecimento da integral e o seu cálculo, se tornam tarefas rudimentares. Ora, a dificuldade e incompreensão da representação do espaço tridimensional *Q*, no registro gráfico, afeta consequentemente a representação analítica do sólido Q que satisfaça o axioma de especificação, como se pode ver nos resultados indicados no Quadro 10. Os estudantes não conseguem mobilizar a representação analítica de Q requerida.

Quadro 10: Respostas de Pedro, Antônio e Alice sobre a t3 do GT3

T3 do GT3	Representar o espaço tridimensional *Q*, analiticamente, no registro algébrico.		
Pedro	Resolução do T3 do GT2 Para realizar esta tarefa, devemos utilizar o modelo estabelecido em sala de aula para o registro algébrico de coordenadas polares. Assim, temos que $Q=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid 4\leq r\leq\frac{28}{3}, 0\leq\theta\leq 2\pi\}$	Antônio	- O espaço Q será a união das duas soluções encontradas nos passos anteriores. Portanto, formado por dois círculos idênticos de raio 2 no plano xy. Portanto o registro algébrico é dado por: $R=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; -4\leq x\leq 4, \frac{28-3x^2-z^2}{3}\leq y^2\leq 4-x^2$
Alice	· Resolução do t3 do GT2: - Para resolver esta tarefa, isto é, representar o espaço tridimensional Q, analiticamente, no registro algébrico, devemos delimitar os limites do espaço Q, pelas equações, onde aplicando isso, temos: · $Q=\{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3 / 0\leq r\leq 2, 0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq z\leq 3\}$.		

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v2.e2024005 2965-6753

Fonte: Recortes de manuscritos de estudantes sobre avaliação de Integrais Duplas.

Conforme visto na análise a priori, a representação analítica espera para o espaço Q consiste no conjunto $Q = \{(r, t. z)\epsilon R^3, (r, t)\epsilon\, \boldsymbol{R}, -\sqrt{28 - 3r^2} \leq z \leq \sqrt{28 - 3r^2}\}$ onde $\boldsymbol{R}$ é o domínio de integração dado anteriormente por $\boldsymbol{R} = \left\{(r, t)\epsilon R^2; 2 \leq r \leq \frac{\sqrt{28}}{3}, 0 \leq t \leq 2\pi\right\}$. Esse resultado não foi alcançado pelos estudantes, como se pode observar nos seus manuscritos apresentados no Quadro 11.

Quadro 11: Respostas de Pedro, Antônio e Alice sobre a t4 do GT3

T4 do GT3	Representar, no registro gráfico, o espaço tridimensional *Q* considerado no GT3.				
Pedro	$V=\iint_Q dA = \int_4^{28/3}\int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dr$ $= \int_4^{28/3} r\theta \Big\|_0^{2\pi} dr$ $= \int_4^{28/3} 2\pi r$ $= \pi r^2 \Big\|_4^{28/3}$ $= \frac{784\pi}{9} - 16\pi = \frac{640\pi}{9}$	Antônio	Alice não chegou a estabelecer a integral	Alice	· Resolução da t4 do GT2: · Para resolver esta tarefa, isto é, utilizar uma integral dupla em coordenadas polares para calcular o volume de Q, devemos utilizar os dados obtidos da resolução da t3 do GT2 para delimitar os limites de integração da integral dupla em coordenadas polares, onde aplicando isso, podemos calcular o volume de Q, temos: * → consideramos o Jacobiano $r=2$ e prosseguimos com a integral. $Q = \int_0^{2\pi}\int_0^3 2 \cdot dz\, d\theta =$

Fonte: Recortes de manuscritos de estudantes sobre avaliação de Integrais Duplas.

O GT3 conduz-nos ao pensamento cognitivo de que o estabelecimento e consequentemente o cálculo de uma integral múltipla é uma tarefa do estudante que depende de certos saberes preliminares genuínos da Geometria Analítica, e devem ser incentivados na formação de todos os estudantes em Cálculo Diferencial e Integral.

Considerações finais

Este artigo foi conduzido pelo seguinte questionamento: Quais são as práticas efetivas dos estudantes de cursos de Engenharias nas IES diante da leitura e interpretação de geradores de tarefas elaborados no cenário do ensino das Integrais Múltiplas? Com ambição de almejar o seguinte objetivo: Analisar as práticas efetivas dos estudantes de cursos de Engenharias diante da leitura e interpretação de geradores de tarefas elaborados no cenário do ensino das Integrais Múltiplas. Para isso fomos incitados a buscar embasamento no Quadro teórico constituído pelo referencial de base que escolhemos, a Teoria Antropológica do Didática e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Com efeito, estamos convencidos de que o nosso questionamento foi respondido e o nosso objetivo também foi alcançado. Foi constatado que os estudantes apresentam diversas dificuldades notáveis, não apenas na leitura e interpretação das tarefas gerenciadas, mas principalmente na necessidade de coordenar as representações dos objetos de saberes previstos em Geometria Analítica (GA) nos registros da Língua materna, algébrico, gráfico e numérico, necessários no estabelecimento e no cálculo de uma Integral Múltipla. A nossa recomendação é, portanto, dar-se mais atenção institucional para aprendizagem destes estudantes, valorizando, não apenas o processo de cálculo de uma integral, mais principalmente a conjuntura dos conhecimentos preliminares, dentre estes, a Geometria Analítica.

Referências

BROUSSEAU G. **Théorie des Situations Didactiques**. La Pensée sauvage, éditions, BP 141, F38100 Grenoble. ISBN 2 85919 134 8. Textes rassemblés et préparés par Nicolas BALACHEF, Martin COOPER, Rosamund SUTHERLAND et Virginia WARFIELD, (1998).

CHAACHOUA, A. T4TEL **Un cadre de reference Didactique pour La Conception des EIAH** - Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM. (2018).

CHEVALLARD, Y. **Concepts fondamentaux de la didactique** : perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, V. 12, n°1, p. 73-112. (1992).

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Tradução: Moretti, M. T. Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, (2012).

DUVAL, R. Signe et objet (I): trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, Strasbourg, v. 6, p. 139-163, (1998).

DUVAL R. **Sémiosis et pensée humaine**, Bern : Peter Lang. (1995).

DUVAL R. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg, v. 5, p. 35-65. (1993).

HALMOS, P. R. **Teoria Ingênua dos Conjuntos**. RJ: Editora Ciência Moderna, (2001).

HENRIQUES, A; FARIAS E.S; NEVES L. N; FUNATO R. L. **Introdução da Unidade Zero no Ensino da Matemática.** RPEM, Campo Mourão, PR, Brasil, v.11, n.25, p.106-132, maio-ago. 2022.

HENRIQUES, A. **Introdução ao Maple enquanto sistema de computação algébrica & gestão de códigos para impressora 3D**. Editus (2021).

HENRIQUES, A., NAGAMINE, A., SERÔDIO, R. **Mobilização de crivos de curvas e de superfícies na resolução de problemas matemáticos: uma aplicação no ensino superior**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.22, n. 1, 253-275, (2020). Disponível em https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/44263. Acessado em 11/12/2023.

HENRIQUES, A. **Saberes Universitários e as suas relações na Educação Básica - Uma análise institucional em torno do Cálculo Diferencial e Integral e das Geometrias**. Via Litterarum. Ibicaraí, Bahia. Editora. 2019.

HENRIQUES, A. & ALMOULOUD, S. A. Teoria dos Registros de Representação Semiótica em Pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: Uma Análise de Superfícies e Funções de duas Variáveis com Intervenção do Software Maple, **Revista Ciência & Educação**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, (2016).

MILHOMEN, E. C., ANDRADE, D. M., BOMFIM.M. E. D., NEVES. R. S. **Tarefas Matemáticas e a formação para a docência em Matemática no Ensino Médio**. Disponível em https://revistarede.ifce.edu.br/ojs/index.php/rede/issue/view/1. Acessado 22/01/2024.

SWOKOWSKI, E. W. (1994), **Cálculo com geometria analítica**. Tradução Alfredo Alves de Faria. 2a ed. Makron Books. São Paulo - Brasil.