

## **Operações Semicognitivas na Resolução de Problemas de Geometria Espacial no Terceiro Ano do Ensino Médio**

### **Semioticognitive Operations in Solving Spatial Geometry Problems in the Third Year of High School**

### **Operaciones semicognitivas en la resolución de problemas de geometría espacial en el tercer año de secundaria**

Adriano Moser \*, Méricles Thadeu Moretti \*\*, Rogério de Aguiar \*\*\*

#### **Resumo**

Neste artigo, apresentou-se resultados que visam não só reconhecimento das operações semicognitivas mobilizadas em geometria na resolução de problemas de Geometria Espacial no Ensino Médio, como também se destacou a relevância do olhar que é capaz de reconhecer e estabelecer relações a partir das informações intrínsecas nas dimensões inferiores ao objeto geométrico em questão, consequência direta da ação da desconstrução dimensional sobre o registro figural. As figuras geométricas se diferenciam por exigir a articulação de dois registros distintos, porém, complementares: a linguagem natural e o registro figural. Ademais, reconhecer a forma geométrica e operacionalizá-la efetivamente para a compreensão e resolução de problemas de geometria permeia pela reeducação do olhar através do reconhecimento das unidades figurais de zero a três dimensões por meio de gestos cognitivos capazes de potencializar propriedades heurísticas próprias da figura geométrica. A escolha de direcionar o olhar para problemas que contemplassem a temática da Geometria Espacial foi motivada dada a sua importância no seu contexto formador de habilidades específicas pois, exige do aluno não só o seu domínio conceitual, mas se faz necessário um sincronismo de ações interpretativas que, de acordo com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, são denominadas apreensões em geometria.

**Palavras-chave:** Objetos geométricos tridimensionais. Apreensões em geometria. Ensino de geometria.

#### **Abstract**

In this article, results were presented that aim not only to recognize the semioticognitive operations mobilized in geometry in solving Spatial Geometry problems in High School, but also to highlight the relevance of the look that is able to recognize and establish relationships from the information intrinsic in the dimensions inferior to the geometric object in question, a direct consequence of the action of the dimensional deconstruction on the figural register. Geometric figures are distinguished by requiring the articulation of two distinct but complementary registers: natural language and figural register. Furthermore, recognizing the geometric shape and effectively operationalizing it for understanding and solving problems permeates the reeducation of the gaze through the recognition of figural units from zero to three dimensions through

---

\* Mestre em Matemática – Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC). Professor Efetivo da Rede Pública do Estado de Santa Catarina. Endereço: Avenida Getúlio Vargas, 189, Centro, Balneário Piçarras, SC, Brasil, CEP: 88.380-000. E-mail: [moseradrianomtm@gmail.com](mailto:moseradrianomtm@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6440-7801>.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5142218152336353>.

\*\* Doutor em Didática da Matemática – Universidade de Estrasburgo (UNISTRA). Professor permanente do Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina (PPGECT/UFSC), Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. Endereço: Campus Universitário, Centro de Ciências Físicas e Matemática, Trindade, Florianópolis, SC, Brasil, CEP: 88.040-900. E-mail: [mthmoretti@gmail.com](mailto:mthmoretti@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3710-9873>.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0554663868893915>.

\*\*\* Doutor em Matemática Aplicada – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professor da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC). Endereço: Rua Paulo Malschitzki, s/número, Campus Universitário Prof. Avelino Marcante, Zona Industrial Norte, Joinville, SC, Brasil, CEP: 89.219-710. E-mail: [rogerville2001@gmail.com](mailto:rogerville2001@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9372-3528>.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/3563874234480861>.

cognitive gestures capable of enhancing heuristic properties typical of the geometric figure. The choice of directing the gaze to problems that contemplated the theme of Spatial Geometry was motivated given its importance in its context that forms specific skills, since it requires from the student not only their conceptual mastery, it is necessary to synchronize interpretive actions that, according to Raymond Duval's theory of Semiotic Representation Records, they are called seizures in geometry.

**Key-words:** Three-dimensional geometric objects. Learning in Geometry. Teaching Geometry.

### Resumen

En este artículo se presentaron resultados que apuntan no sólo a reconocer las operaciones semicognitivas movilizadas en geometría en la resolución de problemas de Geometría Espacial en la Escuela Secundaria, sino que también resaltaron la relevancia de la mirada que es capaz de reconocer y establecer relaciones basadas en información intrínseca en dimensiones inferiores al objeto geométrico en cuestión, consecuencia directa de la acción de la deconstrucción dimensional sobre el registro figurativo. Las figuras geométricas se diferencian en que requieren la articulación de dos registros distintos, pero complementarios: el lenguaje natural y el registro figurativo. Además, reconocer la forma geométrica y operacionalizarla eficazmente para comprender y resolver problemas de geometría implica reeducar la mirada mediante el reconocimiento de unidades figurativas de cero a tres dimensiones a través de gestos cognitivos capaces de potenciar propiedades heurísticas específicas de la figura geométrica. La elección de centrarse en problemas que abarcaran el tema de Geometría Espacial fue motivada dada su importancia en el contexto del entrenamiento de habilidades específicas, ya que requiere que el estudiante no sólo tenga dominio conceptual, sino también sincronice acciones interpretativas que, según Raymond Duval, Teoría de los Registros de Representación Semiótica, en geometría se denominan aprehensiones.

**Palabras clave:** Objetos geométricos tridimensionales. Convulsiones en geometría. Enseñanza de geometría.

### Introdução

À medida que a sociedade caminha para o entendimento de que a Educação não é um simples formalismo social, mas sim, um processo formador de capacidades exigidas tanto no meio social quanto no profissional, ela percebe que a matemática é uma poderosa ferramenta para o exercício da cidadania. Em um mundo cada vez mais globalizado onde são exigidas novas habilidades e competências diversificadas, o raciocínio lógico e a visualização espacial são habilidades a serem desenvolvidas durante o processo de ensino e de aprendizagem de modo que a matemática, em particular o ensino de Geometria, deve contribuir para leitura e compreensão do espaço físico.

De acordo com os documentos oficiais um ensino eficiente de Geometria Espacial favorece o aprimoramento das habilidades de visualização, desenho, argumentação, lógica e visualização tridimensional sendo estas, essenciais na compreensão otimizada do modo de contemplar o espaço ao nosso redor (Brasil, 1999, p. 257).

Porém, o ensino da Geometria Espacial ainda continua sendo feito de modo mecanizado, uma vez que o pano de fundo das metodologias adotadas constitui-se, em grande parte, de aplicação de fórmulas com o objetivo restrito de quantificar grandezas dimensionais como áreas, volumes; restringindo assim à compreensão mais ampla do objeto geométrico por parte do estudante.

O estudante para se inserir dentro do contexto de aprendizagem de um conceito geométrico, precisa coordenar cognitivamente de forma simultânea a representação discursiva em língua natural e a representação figural do objeto geométrico. A representação discursiva pode vir na forma de um enunciado, uma definição por exemplo. Já o registro figural pode estar visível no problema ou simplesmente precisa ser imaginado. Temos, assim, nesses fatores explícitos evidências de uma maior exigência cognitiva desse eixo temático quando comparado aos demais.

Em concordância com Duval, de que a exigência cognitiva está na capacidade de transitar de forma coordenada entre diversos registros de representação desta forma escolheu-se como aporte teórico os seus estudos, mais especificamente a teoria dos Registros de Representação Semiótica no que tange ao aprendizado de geometria, pois de acordo com esse autor um processo resolutivo coerente dentro da perspectiva do contexto geométrico se dá por meio de atitudes interpretativas específicas denominadas por apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial.

Neste artigo, tem-se como objetivo trazer para a discussão as operações semiocognitivas mobilizadas em geometria, tendo como objeto de pesquisa as resoluções de problemas de geometria espacial efetuadas por estudantes do terceiro ano do Ensino Médio. O fato de os problemas disporem de registros figurais em três dimensões representados em duas dimensões (3D/2D) será perceptível a relevância do olhar, em ser capaz de reconhecer e estabelecer relações a partir das unidades figurais de dimensões inferiores ao objeto geométrico em questão.

Uma vez que, os objetos da geometria espacial, exceto para os objetos concretos é mostrada em segunda dimensão (2D). Essa situação é representada por  $nD/mD$  em que  $n$  indica a dimensão em que o objeto matemático é dado a ver (3D, 2D, 1D, 0D) e  $m$  é o número de dimensão no qual se vê aquilo que é dado ver, unicamente 2D ou 3D (Duval, 2018, p.1217, 2018). Em geral, quando não é usado um objeto concreto, a Geometria Espacial é contemplada numa perspectiva 3D/2D, ou seja, o objeto 3D, com os seus vários elementos a serem apreendidos 2D, 1D e 0D, deve ser visto em uma representação plana, essa mudança compulsória de dimensão pode significar um esforço operatório cognitivo elevado e isso nos leva à essencialidade em compreender o modo como as operações cognitivas são exigidas nesse esforço sinérgico de apreensão dos objetos tridimensionais.

Portanto, este trabalho tem como objetivo trazer as observações mais relevantes identificadas em todo processo exploratório, a fim de contribuir não só para a reflexão a respeito do papel dos registros semióticos no processo de aprendizagem da Geometria Espacial, mas também deixar evidente, que operações cognitivas precisam ser estimuladas nos estudantes a fim de otimizar sua

capacidade de visualização e por consequência melhorar a compreensão dos objetos geométricos tridimensionais.

### **Duval e as apreensões em Geometria**

Duval (2013) quando evidencia que o objeto matemático, sendo um objeto ideal, não é tangível a nossa percepção, fica evidente a importância das representações semióticas dentro do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos (Duval, 2013, p. 14). Para o autor, a habilidade em coordenar diferentes representações semióticas relacionadas a um mesmo objeto caracteriza a atividade cognitiva em matemática, uma vez que a compreensão matemática passa pela distinção entre o objeto matemático e suas representações.

Diante do papel central que as representações semióticas assumem no ensino de matemática, Duval (2013) estabelece a definição de registros de representação semiótica de modo a trazer a ideia de registro semiótico como um sistema semiótico que seja capaz de oportunizar atividades cognitivas específicas como descreve o autor:

(...) os sistemas semióticos devem, com efeito, permitir o cumprimento das três atividades cognitivas inerentes a toda representação. Primeiramente, constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis com uma representação de alguma coisa em um sistema determinado. Em seguida, transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais. Enfim, converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado (Duval, 2013, p. 36 - 37).

As três atividades descritas pelo autor são: formação, tratamento e conversão. Entre essas três atividades cognitivas, a conversão é “a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos” (Duval, 2009, p. 63). Desse modo, a aprendizagem de temas geométricos se diferencia de outros eixos temáticos por exigir a coordenação simultânea entre o registro em língua natural e o registro figural, caracterizando uma constante atitude de conversão em relação a esses dois registros.

No ensino da Geometria Espacial, a importância e a qualidade da imagem ganham destaque na compreensão e resolução de problemas geométricos, uma vez que é comum que o estudante desenvolva operações sobre a figura fornecida. Quando um sólido geométrico é apresentado em uma folha de papel, em um livro ou mesmo na tela de um computador o estudante fica preso à percepção visual de um objeto 3D em um meio 2D. E mesmo fazendo-se uso de técnicas de desenho a fim de

expor virtualmente a tridimensionalidade da figura, isso muitas vezes não é suficiente para dar um encaminhamento à resolução de um problema. A explicação para isso é que os tratamentos geométricos ao contemplar também a terceira dimensão exige uma significativa capacidade de visualização (Duval, 2005, p. 6).

É imprescindível que a maneira de ver as figuras estejam pautadas na discriminação das formas incluindo também àquelas dimensionalmente inferiores a partir de sua desconstrução dimensional, gesto cognitivo este essencial para se fazer uso do potencial heurístico do registro figural, todavia, de acordo com Souza (2019), “a simples percepção de um ponto médio, localizado numa figura em 2D, não se faz por uma observação natural, já que existe uma passagem para 1D, ao observar o lado ao qual esse ponto pertence e em 0D, considerando que o ponto referido é adimensional” (Souza, 2019, p. 70).

Sendo assim, a habilidade de “ver” toma um lugar de destaque na compreensão geométrica, uma vez que participando do reconhecimento das formas dimensionais está necessariamente contribuindo para a formação do pensamento geométrico, que para Duval (1995; 2012; 2005; 2018), está na competência cognitiva de reconhecer, construir e descrever objetos geométricos.

A relação qualitativa entre o olhar sobre a figura e a tarefa solicitada, é categorizada por Duval de acordo com o nível de reconhecimento que é exigido. Inicialmente temos o olhar icônico, tido como o mais elementar e é subdividido no olhar do botanista e no olhar do agrimensor, já os olhares do construtor e inventor elevam a exigência de um olhar mais avançado e coordenado pela compreensão da teorização das figuras geométricas, sendo denominado como o olhar não icônico (Duval, 2005, p. 5-9).

Nessa dinâmica “o aprender a ver torna-se cada vez mais importante não só para a disciplina de geometria, mas para grande parte de nossas atividades cotidianas” (Moretti, 2013, p. 290).

Desse modo o processo de ensino deve permear pelo reconhecimento das respectivas dimensões que cada unidade figural contempla na figura, a fim de que seja possível estabelecer relações tanto entre unidades de mesma dimensão quanto também entre dimensões diferentes. Todavia, é fundamental ter a ciência de que o gesto cognitivo da desconstrução dimensional não é natural e que desenvolvê-lo representa um significado avanço cognitivo (Duval, 2018, p. 229).

Duval aponta para quatro gestos interpretativos que norteiam todo processo resolutivo de problemas no que tangem aos conceitos geométricos, sendo essas atitudes cognitivas denominadas pelo autor de “apreensões em geometria” com os nomes de: perceptiva, discursiva, sequencial e operatória (Duval, 2012, p. 127). Há ausência de uma hierarquia entre as apreensões citadas acima,

mas afirma a existência de uma interação entre elas, a fim de estabelecer os processos cognitivos de: visualização, construção e raciocínio nos quais se constituem o pensamento geométrico.

Em relação a apreensão perceptiva diante de um problema geométrico, ela é caracterizada como uma ação imediata e automática do sujeito em relação a figura, onde o registro figural destaca certos elementos da figura que por vezes podem destoar do que está no enunciado do problema do qual a figura faz parte. Duval (2012) é categórico em afirmar que, de imediato ela atua sobre a forma tomando para si um reconhecimento baseado nas propriedades vinculadas aos recursos visuais de contorno, ou seja, ela permite, por exemplo, diferenciar uma figura tridimensional de uma bidimensional e para alguns problemas iniciais da temática de Geometria Espacial essa ação interpretativa pode sim, se mostrar suficiente para levar à resolução coerente (Duval, 2012, p. 120 - 121).

Em alguns problemas somente a apreensão perceptiva não é suficiente para que exista uma compreensão do processo resolutivo que deva ser realizado, sendo então necessária à sua atuação conjunta com a apreensão discursiva de modo que, já a partir do enunciado do problema, seja possível a identificação das unidades figurais que não são visualizadas de imediato no registro figural.

Duval (2009), estabelece critérios quanto ao custo cognitivo para que ocorra a interpretação discursiva desses elementos figurais, de modo que “duas representações semioticamente diferentes, correlacionadas ao menos parcialmente a um mesmo objeto matemático, apresentarão congruência semântica a medida que exista correlação entre seus elementos significantes, univocidade semântica terminal e a mesma ordem das unidades significantes” (Duval, 2009, p. 68-69).

Todavia, no Ensino Médio, a sistemática dos problemas geométricos vinculados a tridimensionalidade exige que a apreensão perceptiva atue em sintonia com as demais apreensões, em particular com a apreensão discursiva que através da interpretação das unidades geométricas formaliza a teorização da representação figural, ou seja, a figura inicial é transformada em uma figura geométrica que de acordo com Duval “torna-se, de certa maneira, um fragmento do discurso teórico” (Duval, 2012, p. 133).

Essa necessidade de teorizar o registro figural tridimensional, nessa etapa do ensino, está inicialmente relacionado ao fato de que a figura pode evidenciar elementos que não estejam dentro da proposta do enunciado, assim também como o enunciado pode expressar elementos que não sejam intuitivos à percepção do registro figural. Desse modo é essencial a interação entre as apreensões perceptiva e discursiva, principalmente quando os registros discursivos e figurais não forem

semanticamente congruentes requisitando assim, que a apreensão discursiva conduza a apreensão perceptiva tendo como eixo norteador as hipóteses afirmadas no enunciado (Moretti, 2013, p. 292).

Quando Duval afirma que toda figura é passível de sofrer transformações, em particular, quando essas modificações contemplam os tratamentos geométricos, expondo assim a capacidade heurística que as figuras geométricas oportunizam, é importante compreender que a ação cognitiva que coordena e potencializa essas modificações iniciais sobre a figura é também responsável pelos rearranjos figurais decorrentes dos tratamentos utilizados. As possíveis transformações que podem ser aplicadas sobre uma figura são denominadas de apreensões operatórias, podendo ser caracterizadas como: mereológica, ótica e posicional (Duval, 2012, p. 127).

**Quadro 1:** Apreensão operatória de uma figura

Apreensão operatória de uma figura	
Tipos de modificações figurais	Operações que modificam a figura
Mereológica (relação parte/todo)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reconfiguração Intermediária (decomposição de uma figura em unidades figurais elementares, podendo ou não serem combinadas entre si ou em outra figura)</li> </ul>
Ótica	<ul style="list-style-type: none"> <li>Anamorfose (variação do plano em relação ao plano fronto-paralelo, mas dinâmico quanto a variação de forma e tamanho)</li> <li>Superposição (a mesma forma e orientação no plano fronto-paralelo, mas dinâmico quanto a variação do tamanho)</li> </ul>
De posição	<ul style="list-style-type: none"> <li>Translação (mesmo tamanho e forma, mas com o mesmo deslocamento orientado a cada unidade elementar da figura no plano visual)</li> <li>Rotação (mesmo tamanho e forma, mas definido uma unidade elementar (OD) qualquer no plano visual o deslocamento orientado da figura é norteado a partir de uma unidade de medida angular qualquer aplicada a cada unidade elementar (OD) que a compõe)</li> </ul>

Fonte: Moser, 2019, p.46.

Por fim, mas não menos importante, a apreensão sequencial é explicitamente essencial em atividades que caracterizam a construção ou a descrição de figuras geométricas e, portanto, está mais relacionada à reprodução de uma dada figura. Como destaca Duval, essas ações interpretativas tendo como objetivo, seguir linearmente um discurso a fim de que o registro figural final reflita a proposta inicial, requer um olhar mais refinado e uma apreensão operatória mais elaborada. Nesse caso, a apreensão perceptiva atua como guia buscando comprovar a cada etapa se as sequências das instruções dadas estão refletindo no objeto geométrico esperado (Duval, 1995, p 146).

Deste modo, é possível compreender que o sucesso nas resoluções dos problemas de Geometria Espacial está relacionado, principalmente, à capacidade do estudante de estabelecer cognitivamente a sinergia entre as diferentes apreensões.

### **Metodologia e Discussão dos Resultados**

A pesquisa realizada foi de cunho qualitativo em relação à abordagem do problema, uma vez que não envolve dados quantificáveis e sim as relações entre os dados coletados, os textos pesquisados e a subjetividade do pesquisador. Do ponto de vista dos objetivos é exploratória fazendo uso da pesquisa bibliográfica, de experimentações e coleta de dados.

A pesquisa foi realizada na Escola de Educação Básica Manoel Henrique de Assis, município de Penha, Santa Catarina, em virtude do Estado de Calamidade adotado pelo país em função da pandemia Covid 19 decretando a suspensão das aulas presenciais, o convite à participação se estendeu para todos os terceiros anos dessa escola que tinham como professor da disciplina de matemática o próprio pesquisador, a fim de que a realização fosse possível acontecer por meio da Plataforma *Google Suite for Education*, a partir do uso da ferramenta *Meets*, com o intuito de acompanhar e realizar as gravações dos encontros.

Diante dessa modalidade exploratória 11 estudantes confirmaram sua participação, e a fim de manter total descrição de suas identidades assumimos a conduta de nomeá-los por A1, A2,...,A11. O número total de três encontros com duração máxima de 60 minutos cada um, mostrou-se suficiente para a aplicação de um bloco de atividade por encontro em que sua estrutura ao contemplar três questões cada, apresentava a seguinte organização temática: o primeiro e o segundo contemplavam o tema de poliedro e o terceiro bloco abrangia a temática de cone, cilindro e esfera.

Cada estudante teve a opção de receber os blocos de atividades na manhã de cada encontro por email ou buscar uma versão impressa que ficaria a sua disposição na unidade escolar no período matutino, uma vez que o estabelecimento realizava atendimento ao público somente pela manhã. Ainda quanto a dinâmica da realização dos encontros, nos dias e horários pré-determinados, o estudante no início da gravação era convidado a se apresentar e ao término expor uma breve análise individual para cada questão, sempre buscando definir o papel do registro figural no contexto do problema.

A escolha das questões para compor o Material Exploratório, considerou como significativa a caracterização de exercícios com objetivos que podemos encontrar em manuais escolares do Ensino

Médio, tendo como proposta resolutive a elaboração de um registro discursivo a fim de otimizar sua interpretação, mediante as ideias formalizadas no aporte teórico. A abordagem sobre os dados colhidos nas aplicações das atividades transcorreu a partir da Análise Interpretativa. Conforme Severino (2007), essa abordagem estabelece etapas que deverão ser contempladas a fim de reduzir a interferência da subjetividade que o interpretante pode inferir na releitura e interpretação dos dados. Portanto, é necessário primeiramente pôr o pensamento desenvolvido numa esfera mais ampla do pensamento geral do autor de modo a estabelecer o contexto do objeto de análise, para que em seguida, a partir da existência de uma compreensão interpretativa do pensamento exposto, explicitar os pressupostos que o texto implica. Dessa forma é possível estabelecer uma aproximação e uma associação das ideias expostas no texto com outras ideias semelhantes e por fim formular um juízo crítico (Severino, 2007, p.59-60).

Associando o fato da pesquisa lidar com processos cognitivos não expressos em seu material de análise e o Método de Análise adotado instigar a formação de ferramentas que fossem capazes de otimizar a compreensão interpretativa do pensamento exposto, uma análise *a priori*<sup>1</sup>, dos blocos de atividade e suas respectivas soluções se tornou um meio essencial para não só identificar as apreensões envolvidas nas resoluções analisadas, como também, favoreceu a configuração lógico-dinâmica das ideias do pesquisador com os autores que foram referência para a pesquisa.

Por melhor explicitar a ideia desse texto foi selecionado um problema de cada bloco de atividade, onde mantivemos a numeração usada na aplicação, a fim de apresentar as apreensões em geometria que mais espelham nas resoluções apresentada pelos estudantes.

### **Análise do Problema 2 – Bloco de atividade 1**

Esse exercício se destaca pela presença de um registro figural com uma significativa tendência a interpretações distintas, sendo, portanto, intuitivo que o estudante busque através de tratamentos geométricos atender as perspectiva do exercício.

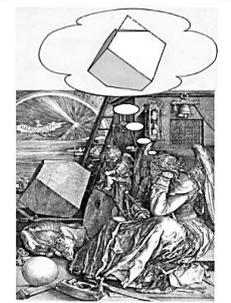
---

1 As análises *a priori* e demais detalhes em relação as atividades podem ser encontradas na referência Moser (2020).

**Quadro 2:** Proposta do Exercício 2 do Bloco de Atividade I

A gravura *Melancolia* de Albrecht (1514) contém vários objetos e símbolos matemáticos. O anjo olha pensativo para uma face do poliedro, notando que a face é um losango sem uma ponta.

Considerando que o poliedro possui duas faces que são triângulos equiláteros e todas as outras são idênticas. Identifique e quantifique os elementos (arestas, vértices e faces) do poliedro em questão.



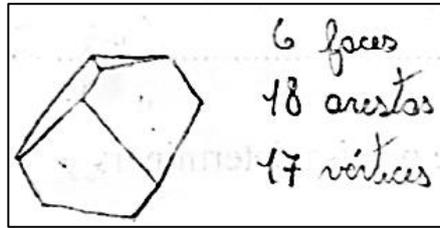
**Fonte:** Adaptada de Matemática sem Fronteira.

Nesse caso, é determinante que exista a identificação dos elementos figurais formadores do poliedro a partir da interação entre as apreensões perceptiva e discursiva, garantindo assim uma atuação eficiente das apreensões operatórias mereológica e ótica através dos respectivos tratamentos: reconfiguração intermediária e superposição, a fim de favorecer o reconhecimento do objeto geométrico.

Seguindo essa proposta, os estudantes A1, A4, A6, A7 e A9 manipularam unicamente o registro figural, porém foi possível perceber resoluções em que a apreensão perceptiva coordenou isoladamente os tratamentos sobre a figura no contexto tridimensional suprimindo a ação da apreensão discursiva, contribuindo assim para resoluções descontextualizadas com a proposta do exercício.

Por exemplo, a resolução apresentada pelo estudante A4, Figura 1, caracterizou-se pelo uso restrito do olhar icônico sobre a figura, não permitindo assim contemplar de modo eficiente elementos dimensionalmente inferiores ao objeto geométrico tridimensional dado e, dessa forma, as informações descobertas se mostraram não compatíveis com o poliedro descrito no problema. Duval destaca para o estímulo imediato e automático que o registro figural promove através da apreensão perceptiva tendo como consequência o reconhecimento de elementos geométricos que não necessariamente são os mesmos elementos pertencentes a proposta do problema (Duval, 2012, p. 120).

**Figura 1** - Resolução do Estudante A4 - Exercício 2 do Bloco de Atividade I

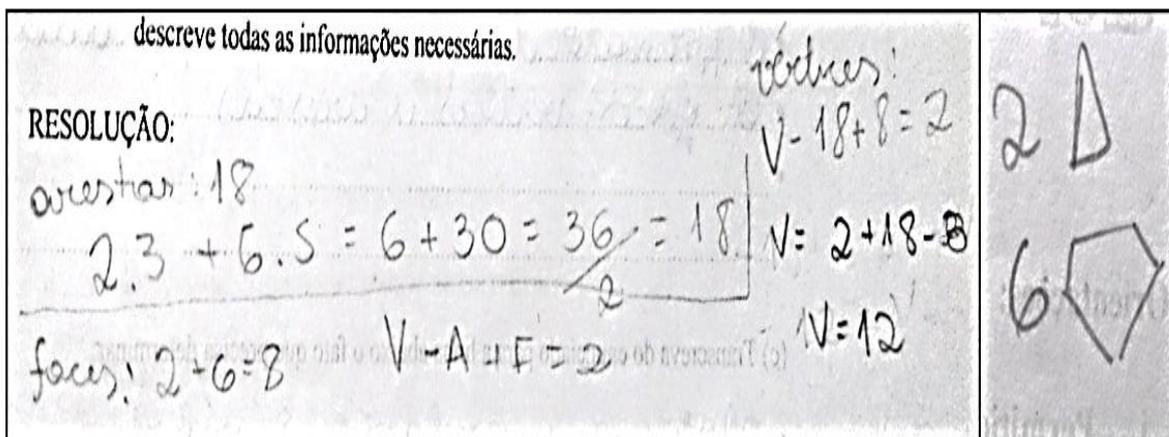


Fonte: Moser, 2020, p. 111.

A necessidade de olhar não iconicamente para um registro figural, principalmente em Geometria Espacial exige uma aproximação significativa com o objeto geométrico em questão, a fim de que os tratamentos matemáticos decorrentes desse processo resolutivo possam se basear em afirmações alinhadas com o sólido descrito no problema. Todavia, se tomarmos as resoluções dos estudantes A2, A3, A5, A8, A10 e A11, todos buscaram operacionalizar a figura a fim de utilizar o recurso da relação de Euler para determinar o elemento da figura de maior dificuldade, porém os tratamentos matemáticos apresentados por A3 e A11 evidenciaram falhas ao identificar elementos 0D, 1D e 2D a partir da visualização do objeto tridimensional exposto no plano.

Por outro lado, a interação efetiva da apreensão discursiva contribuiu para o reconhecimento do objeto geométrico, desse modo os tratamentos matemáticos decorrentes dessas interpretações mostram-se funcionais, como por exemplo a resolução apresentada pelo estudante A8, conforme a Figura 2.

**Figura 2** - Resolução do Estudante A8 - Exercício 2 do Bloco de Atividade I



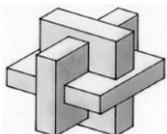
Fonte: Moser, 2020, p. 112.

Portanto, numa percepção global dos processos resolutivos apresentados pelos estudantes, ficou evidente que todos inicialmente permearam pela iconicidade da figura, mas somente alguns conseguiram manipular o registro figural numa perspectiva não icônica. Desse modo é possível afirmar

que todos se utilizaram da apreensão perceptiva em suas tomadas de atitudes, e do fato de que essa apreensão pode operacionalizar os tratamentos geométricos e, considerando que todos os alunos se dedicaram a apresentar alguma forma de raciocínio, inferimos que as resoluções consideradas incorretas foram consequências direta da interação não determinante da apreensão discursiva com a apreensão perceptiva.

### **Análise do Problema 3 – Bloco de atividade 2**

#### **Quadro 3: Proposta do Exercício 3 do Bloco de atividade II**

<p>A Figura ao lado mostra três paralelepípedos entrelaçados formam um sólido mostrado ao lado. Eles têm a mesma dimensão 2cm x 8cm x 10cm. Calcule o volume do sólido descrevendo sua resposta.</p>	
--	---

**Fonte:** Adaptada de Matemática sem Fronteira

De acordo com o enunciado acima é possível reconhecer que o fato de os paralelepípedos entrelaçados serem congruentes e de não existir um tratamento matemático imediato para a forma original da figura, motiva a ação de modificar o registro figural de modo a obter o menor custo cognitivo quanto ao seu uso para a resolução do problema.

Sendo assim, a atuação da apreensão perceptiva mostrou-se essencial para o reconhecimento das formas geométricas tanto iniciais quanto aquelas que não de vir no decorrer dos tratamentos geométricos, porém a tridimensionalidade das transformações evoca a atuação da apreensão discursiva para definir através da reconfiguração intermediária as partições do sólido, de modo que a aplicação em partes do tratamento de volume possa, no seu somatório, representar o volume do objeto inicial.

Nesse caso, a necessidade de rearranjar os elementos geométricos da figura, ultrapassam a capacidade da simples percepção icônica do registro figural, caracterizando assim a necessidade de atuar cognitivamente na desconstrução dimensional do objeto geométrico. Porém, o uso do registro figural como sendo opcional no contexto resolutivo ficou evidente nas resoluções apresentadas pelos estudantes A1, A4, A9 e A11, Figura 3, uma vez que dimensionaram excessivamente o volume em questão. É importante, nesse caso, que o estudante seja conduzido a reconhecer uma representação figural não como sendo um acessório agregado ao conceito, podendo escolher ou não fazer uso para acessar a compreensão do objeto geométrico em questão (Kluppel, 2014, p.120).

-

Figura 3 – Resoluções dos Estudantes A1, A4, A9 e A11 no Exercício 3 - M2

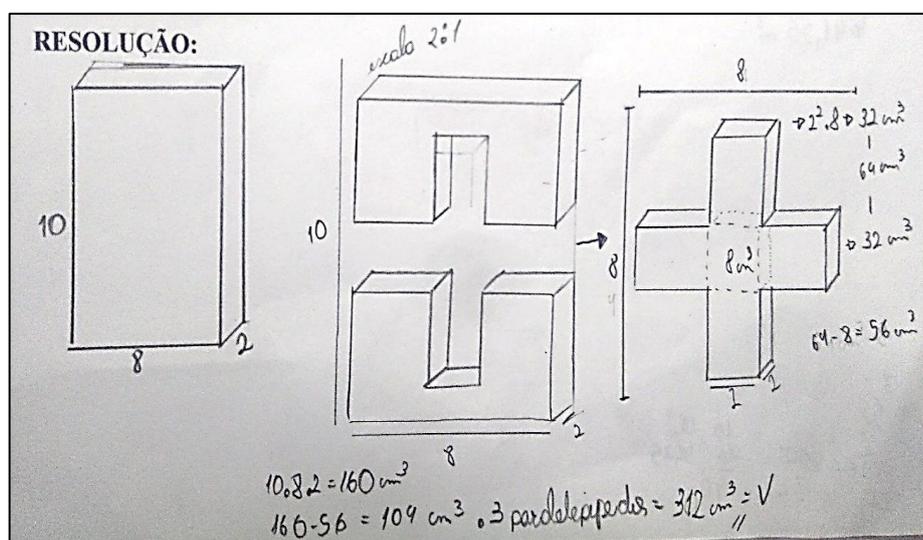
<b>Resolução do Estudante A1</b>	<b>Resolução do Estudante A4</b>
<b>RESOLUÇÃO:</b> $2 \cdot 8 \cdot 30 = 360 \rightarrow$ volume de cada paralelepípedo $360 \cdot 3 = 480 \rightarrow$ volume dos três	<b>RESOLUÇÃO:</b> $2 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 1600$ $\times 3$ $V = 4800$
<b>Resolução do Estudante A9</b>	<b>Resolução do Estudante A11</b>
<b>RESOLUÇÃO:</b> $20 \text{ cm} - 8 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$ $12 \cdot 8 \cdot 3 = 288$ $2 \cdot 8 \cdot 3 = 48$ $288 + 48 = 336$ $\rightarrow$ a soma dos volumes das 3 peças	<b>RESOLUÇÃO:</b> $V = c \cdot l \cdot h \cdot 3$ $V = 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 3$ $V = 80 \cdot 2 \cdot 3$ $V = 160 \cdot 3$ $V = 480 \text{ cm}^3$

Fonte: Moser, 2020, p. 133.

Os demais estudantes, porém, abordaram a figura tridimensional em sua complexidade, por exemplo, a resolução apresentada pelo estudante A10, que ao fazer uso inicialmente de um olhar icônico a fim de reconhecer a figura em sua percepção métrica, pudesse elaborar desenhos auxiliares com o intuito de otimizar a compreensão da decomposição tridimensional que representaria o objeto geométrico definido no problema.

Todavia o elevado custo cognitivo de realizar modificações tridimensionais no plano foi determinante para que esse estudante deixasse de considerar partes desse objeto e, portanto, o resultado apresentado do volume se mostrou aquém do ideal, como evidencia a Figura 4:

Figura 4 - Resolução do Estudante A10 no Exercício 3 do Bloco de atividade II



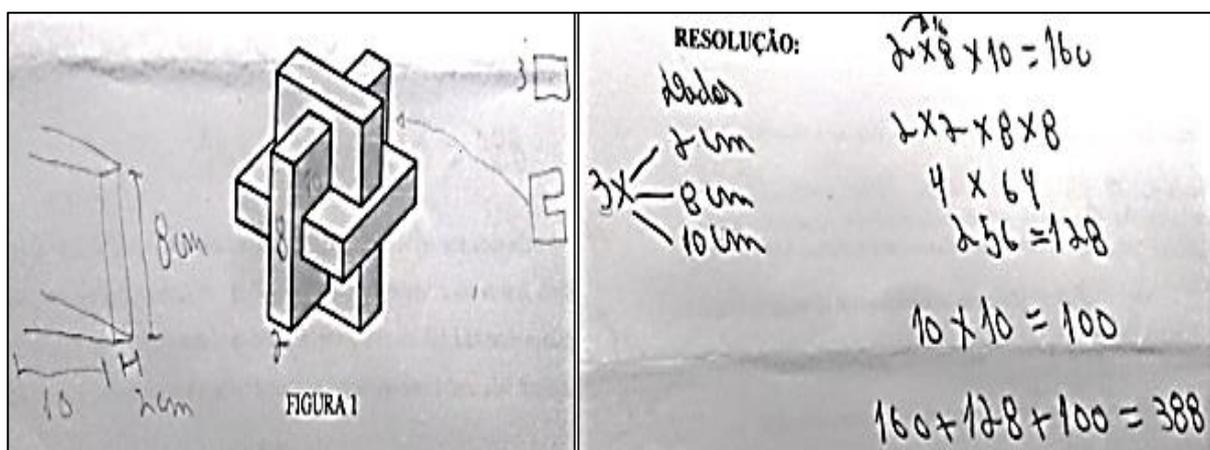
Fonte: Moser, 2020, p. 134.

É possível afirmar que a parcialidade com que as apreensões operatórias atuaram no processo resolutivo apresentado pelo estudante A10, não exclui a interação da apreensão discursiva em buscar teorizar o registro figural. Porém a existência da realização de transformações tridimensionais em realidade bidimensionais sem recursos que ampliem a capacidade de visualização, demanda um alto custo cognitivo para o estudante e dessa forma deve-se desenvolver alternativas que estimulem as habilidades do olhar para que essa dificuldade seja pelo menos amenizada.

Por outro lado, a resolução apresentada pelo estudante A2 reafirma a necessidade de que a apreensão perceptiva na Geometria Espacial precisa estar interagindo com a apreensão discursiva, de modo a superar a limitação visual do objeto 3D no plano bidimensional, pois é facilmente possível identificar que as construções figurais auxiliares desse estudante não evidenciam uma aproximação com o objeto geométrico em questão.

Além do mais, ao analisar a construção do seu raciocínio é possível identificar uma ruptura conceitual no instante em que faz uso de grandezas bidimensionais na composição do volume, como mostra a Figura 5.

Figura 5 - Resolução do A2 no Exercício 3 do Bloco de atividade II



Fonte: Moser, 2020, p. 134.

Somente os estudantes A5 e A6 desenvolveram processos resolutivos que contemplassem a proposta do problema, como por exemplo, na resolução do estudante A5, é possível observar uma excepcional capacidade de visualização, pelo fato dele realizar os tratamentos geométricos sem a necessidade de expor em figuras seus resultados. As conclusões obtidas mostraram-se por meio dos registros em língua natural, como evidencia a Figura 6.

Figura 6 - Resolução do Estudante A5 no Exercício 3 do Bloco de Atividade II

**RESOLUÇÃO:**

Calculo de 1 paralelepípedo  $2 \cdot 8 \cdot 10 = 160 \text{ cm}^3$

Calculo das duas partes verticais que sobraram  $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 = 128 \text{ cm}^3$

Calculo das duas partes restantes, descontando o que já calculado  $2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 8 - 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot (64 - 8) = 2 \cdot 56 = 112 \text{ cm}^3$

Soma de todos:  $160 + 128 + 112 = 392 \text{ cm}^3$

Volume Total = 392 cm<sup>3</sup>

Fonte: Moser, 2020, p. 136.

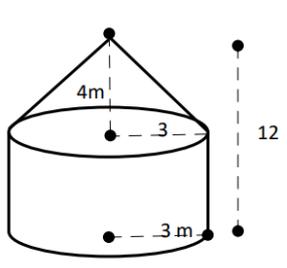
Todavia, a quantidade significativa de soluções incorretas apresentadas neste exercício nos norteou a observar dois fatores que contribuiriam para que, dos 11 pesquisados, somente 2 apresentassem uma resolução em conformidade com a proposta do problema. Primeiramente, a apreensão operatória mereológica representava uma significativa relação com as tomadas de decisões coerentes, e a restrição de atuar tridimensionalmente na folha de exercício favoreceu raciocínios equivocados, uma vez que esse contexto exigia uma capacidade de visualização maior. Por outro lado, a elevada variabilidade quanto a decomposição do sólido agregou complexidade às operações geométricas.

### Análise do problema 2 – Bloco de atividade 3

Neste exercício os estudantes precisavam desenvolver um registro discursivo que justificasse a capacidade ou não do silo em armazenar uma determinada colheita. Mesmo não existindo uma congruência semântica entre a figura geométrica que representava o silo e um tratamento matemático que quantificasse o seu volume, as formas elementares que formavam esse objeto de armazenamento, favoreciam o entendimento das modificações figurais que deveriam ser executadas a fim de operacionalizar o volume das figuras decompostas, para assim poder definir o volume máximo do silo.

Por outro lado, a quantidade expressiva de grandezas inseridas no contexto do problema dimensionaria a complexidade de coordenar não só os elementos geométricos provindos dos registros figurais, como também os elementos discursivos inseridos tanto no enunciado, quanto na figura, como mostra o Quadro 4.

Quadro 4 – Proposta do Exercício 2 do Bloco de Atividade III

<p>Um produtor de soja plantou uma área equivalente a 10 hectares, onde estima uma produtividade de 55 sacos por hectares (saca de 60 kg). Em sua propriedade existe um silo vertical, conforme a Figura ao lado, e seria do seu interesse armazenar toda a sua produção nesse silo. Utilizando os cálculos de volume do cilindro, cone e densidade, será possível armazenar a produção dentro desse silo? <u>Justifique.</u></p> <p>Considere a densidade da soja sendo <math>800\text{kg/m}^3</math>.</p>	
---	---

Fonte: Questão adaptada o ENEM 2016.<sup>2</sup>

Nas resoluções apresentadas pelos 11 estudantes, se nos atermos somente ao processo dos tratamentos matemáticos realizados, mais da metade das resoluções contemplavam registros numéricos coerentes, mas como a proposta do problema era de fazer uso desses registros para formular um discurso em língua natural que justificasse suas conclusões, somente os estudantes A1, A8 e A9 se dispuseram em construir um argumento com as informações determinadas. Essa ausência de um registro discursivo argumentativo estaria vinculada, particularmente, a falta de interação do estudante com problemas que não se baseiam somente em resultados numéricos, mas que idealizam também uma conclusão discursiva (Almouloud, 2013, p.130).

No caso da resolução do estudante A7, Figura 7, não ocorreu falhas do desencadeamento dos tratamentos matemáticos, mas sim no reconhecimento de uma única unidade geométrica, que permeando ambos os objetos geométricos decompostos pela apreensão operatória mereológica, desencadeou uma sequência de registros desvinculados com as figuras geométricas em questão. Nesse caso, a ruptura conceitual identificada foi de considerar o segmento do raio como sendo o diâmetro, como é possível identificar através do tratamento matemático para quantificar o volume, tanto do cilindro, quanto do cone, se basear na medida do raio da figura da base com sendo o valor de 1,5 cm.

Figura 7 - Resolução do Estudante A7 no Exercício 2 do Bloco de Atividade III

2 INEP, Provas e Gabaritos, ENEM 2016, Questão 142, página 19, Disponível em: <[https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/provas/2016/CAD\\_ENEM\\_2016\\_DIA\\_2\\_06\\_CINZA.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/CAD_ENEM_2016_DIA_2_06_CINZA.pdf)>. Acesso em 25/04/2021

**RESOLUÇÃO:**

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{3,14 \cdot 5,5^2 \cdot 4}{3}$$

$$V = 28,26$$

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$$

$$V = 3,14 \cdot 5,5^2 \cdot (2-4)$$

$$V = 56,52$$

$$V = 56,52 + 28,26$$

$$V = 84,78 \text{ m}^3$$

$$20 \cdot 55 = 550$$

$$550 \cdot 60 = 33000 \text{ kg}$$

$$84,78 \text{ m}^3 \cdot 800 = 67.824 \text{ kg/lms}$$

Sim a produção pode ser armazenada

Fonte: Moser, 2020, p. 148.

No registro da resolução do estudante A11 como mostra a Figura 8, sua afirmação quanto a capacidade do silo ser suficiente para o armazenamento da colheita descrita no enunciado, expõe uma distorção conceitual dos objetos geométricos envolvidos, nesse caso, a apreensão discursiva ao teorizar as figuras geométricas mostrou-se disfuncional, pois tomar como verdade que o volume do cilindro deveria ser considerado como sendo a terça parte do cone evidencia um distanciamento cognitivo com esses sólidos geométricos.

Figura 8 - Resolução do Estudante A11 no Exercício 2 do Bloco de Atividade III

**RESOLUÇÃO:**

$$V_{\text{cone}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 4$$

$$V_{\text{cil}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 8$$

$$V_{\text{cil}} = \frac{72\pi}{3}$$

$$24 + 36 = 60 \text{ m}^3$$

$$V = \frac{333.000}{800}$$

$$V = 41,25 \text{ m}^3$$

$$d = \frac{m}{V}$$

$$800 \text{ kg/m}^3 = \frac{333.000 \text{ kg}}{V}$$

Sim, pois a loja irá ocupar 41,25 m<sup>3</sup> do silo

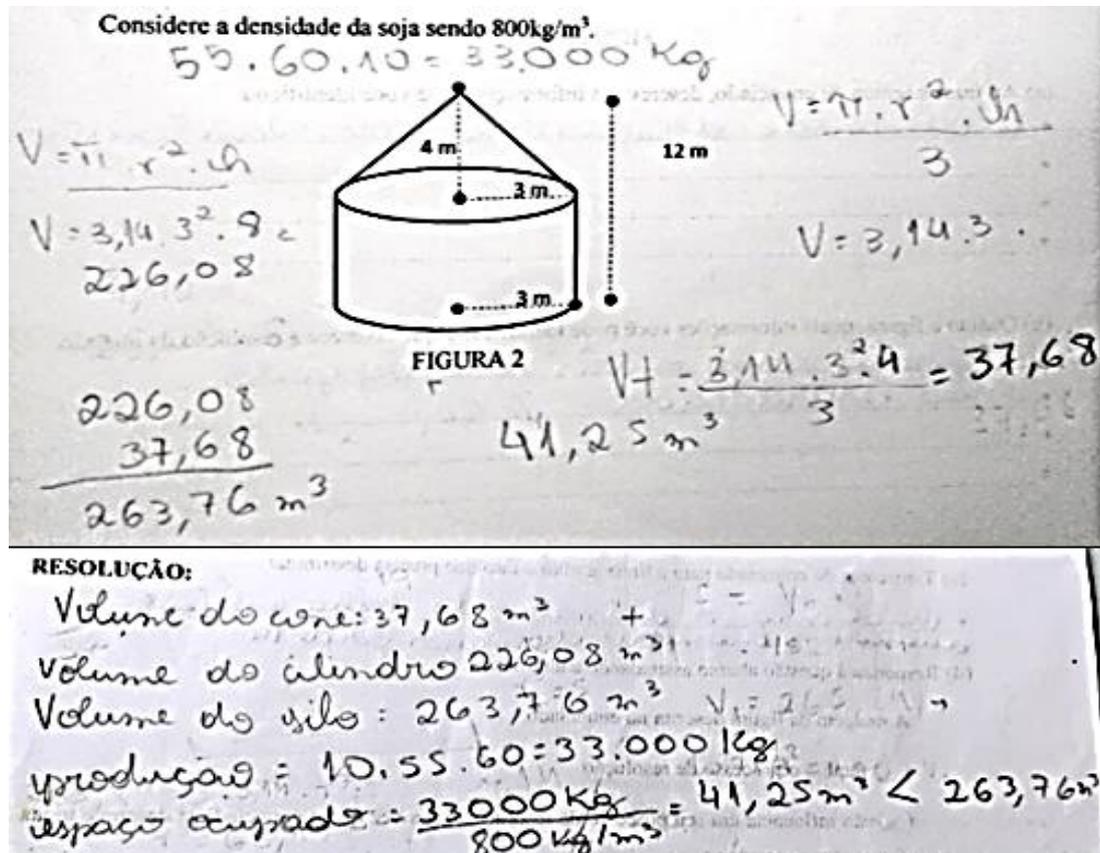
**Exercício 3:** Assoprando suavemente em uma superfície horizontal com água e sabão conforme mostra a figura 3, Estela faz uma bolha de sabão de forma semiesférica com um diâmetro de 12 cm. Em seguida, ela assopra uma segunda bolha dentro da primeira. A primeira bolha então fica maior. O volume final é a soma

Fonte: Moser, 2020, p. 149.

Ao favorecer os estudantes a não só construírem resultados numéricos, mas principalmente utilizarem desses registros numéricos para compor um registro discursivo argumentativo, mesmo que este permaneça restrito a uma descrição ordenada desses registros, nos permite inferir que essa prática pode contribuir para a redução dos problemas envolvendo a aprendizagem de geometria, uma vez que em grande parte essas dificuldades são de origem didática e linguística (Almouloud, 2013, p. 130).

Essa dificuldade em formular um registro na língua natural, em que se possa identificar fundamentação em seu discurso foi constatado na resolução do estudante A8, por exemplo, que fez uso de uma desigualdade favorável a capacidade do silo com a intenção de afirmar que a colheita idealizada no contexto do problema, seria sim, armazenada completamente nesse silo, como evidencia a Figura 9.

Figura 9 - Resolução do Estudante A8 no Exercício 2 do Bloco de Atividade III



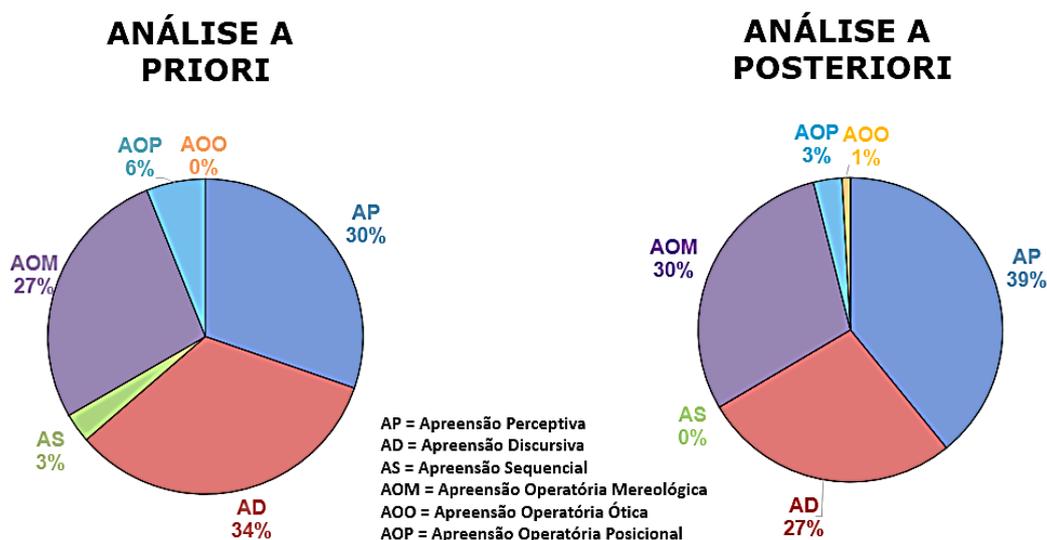
Fonte: Moser, 2020, p. 153.

Pela proposta do exercício, o processo resolutivo estabelecido pelo estudante A8, evidencia clareza quanto a interação entre as apreensões responsáveis pelo reconhecimento do objeto geométrico, coordenando assim a apreensão operatória mereológica a partir da reconfiguração intermediária, de modo a estabelecer não só coerência nos tratamentos matemáticos, mas organização cognitiva para exercê-los, a fim de estabelecer sua conclusão através da expressão da desigualdade entre os volumes.

Foi identificado uma redução da atuação da apreensão discursiva nos processos resolutivos apresentados pelos estudantes, quando comparados aos processos interpretativos previstos na análise *a priori*, como mostra o Gráfico 1. Conclui-se assim que ocorreu uma menor coordenação entre

os registros discursivos e figurais durante a realização da fase exploratória da pesquisa, tendo como instrumento de exploração os três Blocos de Atividades.

**Gráfico 1 - Apreensões em geometria nas resoluções dos exercícios**



Fonte: Moser, 2020, p. 166.

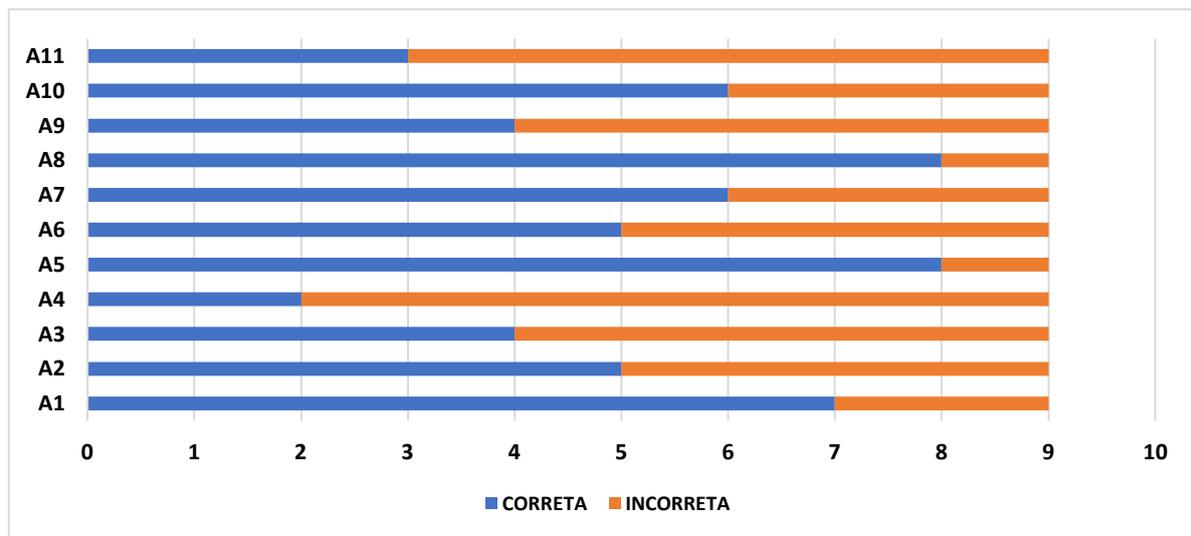
Uma menor atuação da apreensão discursiva tem como consequência imediata, uma atuação de maior predominância da apreensão perceptiva sobre os tratamentos geométricos, e dessa forma, o reconhecimento dos elementos figurais permeiam-se na iconicidade do objeto geométrico desencadeando ações resolutivas descontextualizadas com a proposta original do problema (Duval, 2012, p. 120-121).

Uma vez que a atuação da interpretação discursiva contribui significativamente para que o processo resolutivo se caracterize coerente com a proposta do exercício, como evidenciam os Gráficos 2 e o Gráfico 3, ao relacionar quantitativamente as resoluções corretas por estudante com a atuação da apreensão discursiva.

Desse modo, a limitação imposta pela bidimensionalidade quanto a visualização espacial, não acarretaria no aumento desproporcional do custo cognitivo quanto ao entendimento da proposta do problema, pois a transição da percepção da forma para o reconhecimento do objeto geométrico, estaria sendo coordenada pela apreensão perceptiva subordinada a apreensão discursiva, pois de acordo com Duval (2012), “a apreensão discursiva de uma figura equivale a mergulhar, segundo as indicações de um enunciado, uma figura geométrica particular em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável” (Duval, 2012, p. 135).

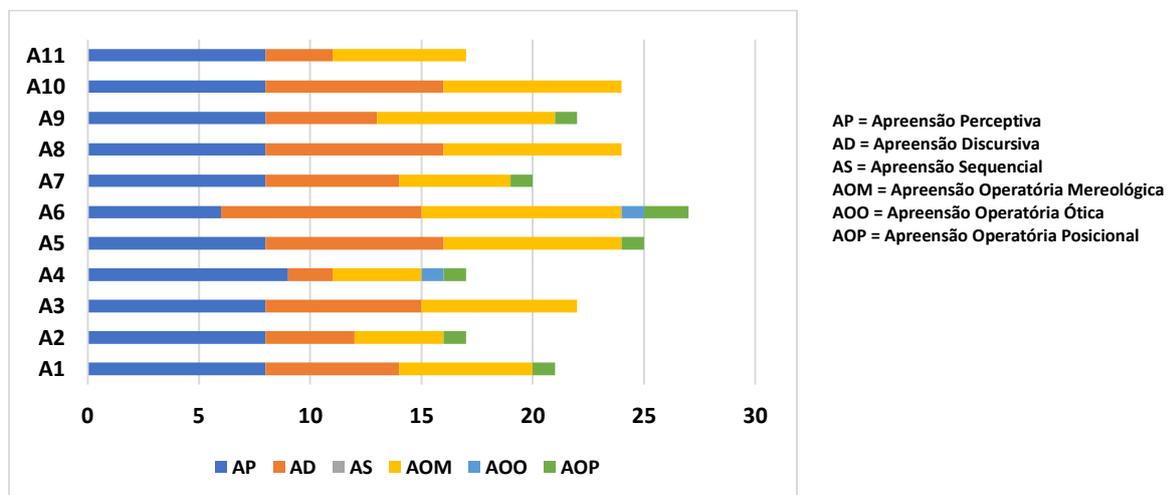
Apresentamos a seguir, no Gráfico 2, o quantitativo das respostas dos alunos e em seguida, no Gráfico 3, correlacionamos as respostas com as apreensões em geometria.

**Gráfico 2 - Resoluções corretas e incorretas por estudante**



Fonte: Moser (2020, p. 167)

**Gráfico 3 - Relação das apreensões em geometria mais atuantes por estudante**



Fonte: Moser (2020, p. 168)

De um modo geral, a apreensão perceptiva evidenciou-se atuante em todos os processos resolutivos, da mesma forma que a apreensão operatória mostrou-se presente nos tratamentos geométricos apresentados pelos pesquisados. Entretanto, diante da caracterização do material exploratório e da metodologia que coordenou a sua aplicação, a apreensão discursiva ao se mostrar parcial ou completamente inoperante no processo interpretativo, evidenciou, nesses casos em particular, que o desenvolvimento da resolução se mostrou descontextualizado quanto a proposta do problema.

Ademais, ficou evidente de que quando o estudante enclausura o seu olhar na dimensão do registro figural dado no problema, é de fácil reconhecimento a ausência do gesto cognitivo da desconstrução dimensional em seu processo resolutivo, ou seja, o seu raciocínio não demonstra uma ação articulada e interpretativa entre as unidades figurais que compunham a figura e os registros discursivos presentes no problema.

### Considerações finais

Como proposta, tínhamos como eixo norteador, identificar as apreensões em geometria na resolução de problemas de Geometria Espacial no Ensino Médio, de modo que o professor possa compreender a atuação interpretativa que coordena o processo de compreensão e resolução de problemas de Geometria Espacial.

Neste caso, pode-se considerar que os problemas de Geometria Espacial necessitam maximizar o reconhecimento teórico do objeto geométrico em questão, por meio de um processo de alternância entre a visualização e a linguagem. Observa-se que a teorização da figura geométrica assume um papel decisivo na compreensão e resolução de questões em que a tridimensionalidade fica restrita a compensações didáticas no plano, principalmente quando nos restringimos a uma folha de papel.

Assim sendo, o aprimoramento da forma com que se contempla um objeto geométrico deve estar inserido na didática a ser utilizada pelo professor, desse modo, a atuação das apreensões em geometria geram maior coordenação e eficiência na ação cognitiva da desconstrução dimensional, e se configuram no processo central no entendimento da geometria.

Enfim, se a complexidade da compreensão da geometria tridimensional em seu caráter cognitivo é ampliada quando o contexto escolar é dotado de limitações, sejam elas de natureza física ou didática, a existência da consciência por parte do educador quanto ao processo semiocognitivo de aprendizagem dos conceitos geométricos, contribuem para a superação dos obstáculos que estejam presentes em seu contexto escolar.

### Referências

Almouloud, S. Ag. **Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos**. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (Org.). 8ª ed. - **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**- Campinas, São Paulo. Papirus, pp. 125-148. 2013.

Brasil, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. Brasília.** Ministério da Educação, Secretária de Educação Média e Tecnológica: Ministério da Educação, 1999.

Duval, R. **Les conditions conitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnement et coordination de leurs fonctionnements.** Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, n. 10, p. 5-53, 2005.

Duval, R. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais** – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

Duval, R. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência.** Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.1, Florianópolis : UFSC/MTM; PPGECT, 2012. (Disponível em <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>)

Duval, R. **Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (Org.). 8ª ed. - **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**- Campinas, São Paulo. Papirus, pp. 125-148. 2013.

Duval, R. **Per l'educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura**<sup>1</sup>. La matematica e la sua didattica • Anno 26, n. 2, 211–245. 2018.

Kluppel, Gabriela Teixeira; BRANDT, Célia Finck. **Reflexões Sobre o Ensino da Geometria em Livros Didáticos à Luz da Teoria de Representações Semióticas Segundo Raymond Duval.** IN: BRANDT, Célia Finck (Org); MORETTI, Méricles Thadeu (Org.). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática.** Ijuí: Ed. Unijuí, 2014 – 256p.

Machado, Silvia Dias Alcântara (org), **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica** – 8ª Edição, - Campinas, SP: Papirus, 2013.

Matemática sem fronteiras, Provas Anteriores, Prova Júnior e Sênior 2017, Questão 7, disponível em <<http://matematicasemfronteiras.org/provas.html>>, Acesso em 25/04/2021.

Moretti, Méricles Thadeu. **Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria.** Acta Scientiae, V.15, nº. 2, p. 289-303, maio/ago. 2013b.

Moretti, Méricles Thadeu; BRANDT, Célia Finck. **Construções de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras.** III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.17, n.3, p.597-616, 2015.

Moser, Adriano. **As apreensões em geometria na resolução de exercícios de Geometria Espacial na terceira série do Ensino Médio** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas. Joinville, 2020. 175 p.

Severino, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 23 ed. rev. e atual – São Paulo: Cortez Editora, 2007.