REDE
Revista Ensino em Debate

Explorando o Ensino de Geometria Diferencial: Uma Análise do Livro de Keti Tenenblat

Exploring the Teaching of Differential Geometry: An Analysis of Keti Tenenblat's Book

Investigando la enseñanza de la geometría diferencial: un análisis del libro de Keti Teneblat

Ana Carla Pimentel Paiva[*], Francisco Régis Vieira Alves [**], Helena Maria de Barros Campos[***], Georgyana Gomes Cidrão [****]

Resumo

Esse estudo consiste em uma parte de uma pesquisa de mestrado, em que foi realizada a análise de um dos principais livro-texto empregues na disciplina Geometria Diferencial, o livro analisado é intitulado "Introdução à Geometria Diferencial" de Keti Tenenblat. O objetivo da análise trata-se de investigar as abordagens pedagógicas aplicadas ao ensino dessa disciplina, utilizando a metodologia da Engenharia Didática. Investigamos a apresentação teórica dos conceitos, a estrutura dos capítulos, a utilização de exemplos práticos e exercícios, além da interdisciplinaridade com outras áreas de conhecimento. A análise buscou destacar como o livro atua na compreensão dos alunos sobre tópicos complexos, e se promove o desenvolvimento de habilidades analíticas e fomenta a aplicação do conhecimento em problemas reais. Após análises e discussões acerca da abordagem do livro constatou-se que a natureza de transmissão dos conceitos prioriza uma abordagem algébrica e sem empregar a visualização dos conceitos geométricos. Ademais este estudo busca contribuir para a discussão sobre as melhores práticas no ensino de Geometria Diferencial, oferecendo insights valiosos para educadores e estudantes.

Palavras-chave: Ensino; Geometria Diferencial; Análise de livro.

[*] Mestre pelo Programa de Pós-Graduação do Ensino de Ciências e Matemática – PGECM do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - Campus Fortaleza-Brasil. Doutoranda do Programa de Pós- Graduação em Ensino - RENOEM, Fortaleza, CE, Brasil. Av. Treze de Maio, 2081 - Benfica, Fortaleza - CE, 60040-531. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5801-9562 . Lattes: http://lattes.cnpq.br/8323398930648602.
E-mail:carlapimentel00@gmail.com

[**] Doutor com ênfase em Ensino de Matemática (UFC - 2011). Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - Campus Fortaleza-Brasil. Fortaleza, CE, Brasil. Av. Treze de Maio, 2081 - Benfica, Fortaleza - CE, 60040-531. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3710-1561. Lattes: http://lattes.cnpq.br/8323398930648602.
E-mail:fregis@ifce.edu.br

[***] Doutora em Matemática em 2008 pelo(a) Universidad de Educación a Distancia. Professor Auxiliar no(a) Universidade de Tras-os-Montes e Alto Douro Departamento de Matematica. – UTAD, Quinta de Prados, Vila Real, Portugal. Endereço para correspondência: Quinta de Prados, Vila Real, Portugal, CEP: 5000-801. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2767-0998.
E-mail: hcampos@utad.pt

[****] Mestre pelo Programa de Pós-Graduação do Ensino de Ciências e Matemática – PGECM do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - Campus Fortaleza-Brasil. Doutoranda do Programa de Pós- Graduação em Ensino - RENOEM, Fortaleza, CE, Brasil. Av. Treze de Maio, 2081 - Benfica, Fortaleza - CE, 60040-531. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4401-5904. Lattes: http://lattes.cnpq.br/4542907481251503.
E-mail:georgyanacidrao28@gmail.com

**** O presente trabalho foi desenvolvido por duas alunas de doutorado e bolsistas, primeira e quarta autora, do programa de pós-graduação RENOEM, Doutorado em Ensino polo IFCE-*campus* Fortaleza

Abstract

This study consists of part of a master's degree research, in which the analysis of one of the main textbooks used in the Differential Geometry discipline was carried out. The book analyzed is entitled "Introduction to Differential Geometry" by Keti Tenenblat. The objective of the analysis it is about investigating the pedagogical approaches applied to teaching this discipline, using the Didactic Engineering methodology. We investigate the theoretical presentation of the concepts, the structure of the chapters, the use of practical examples and exercises, in addition to interdisciplinarity with other areas of knowledge. The analysis sought to highlight how the book affects students' understanding of complex topics, and whether it promotes the development of analytical skills and encourages the application of knowledge to real problems. After analysis and discussions about the book approach, it was found that the nature of transmission of concepts prioritizes an algebraic approach and without employing the visualization of geometric concepts. Furthermore, this study seeks to contribute to the discussion about best practices in teaching Differential Geometry, offering valuable insights for educators and students.

Keywords: Teaching; Differential Geometry.

Resumen

Este estudio forma parte de una investigación de maestría, en la cual se realizó el análisis de uno de los principales libros de texto utilizados en la disciplina Geometría Diferencial. El libro analizado lleva por título "Introducción a la Geometría Diferencial" de Keti Tenenblat. análisis se trata de investigar los enfoques pedagógicos aplicados a la enseñanza de esta disciplina, utilizando la metodología de la Ingeniería Didáctica. Indagamos en la presentación teórica de los conceptos, la estructura de los capítulos, el uso de ejemplos y ejercicios prácticos, además de la interdisciplinariedad con otras áreas. El análisis buscó resaltar cómo el libro afecta la comprensión de los estudiantes sobre temas complejos, y si promueve el desarrollo de habilidades analíticas y fomenta la aplicación del conocimiento a problemas reales, se encontró. que la naturaleza de la transmisión de conceptos prioriza un enfoque algebraico y sin emplear la visualización de conceptos geométricos. Además, este estudio busca contribuir a la discusión sobre las mejores prácticas en la enseñanza de la Geometría Diferencial, ofreciendo conocimientos valiosos para educadores y estudiantes.

Palabras clave: Enseñando; Geometría diferencial; Análisis de libros.

Introdução

A Geometria Diferencial (GD) estuda as propriedades e singularidades geométricas de curvas, superfícies e suas generalizações, empregando técnicas do cálculo infinitesimal. Esta área da Matemática possui uma forte interação com diversas outras áreas científicas, desde sua origem na cartografia até a Teoria da Relatividade. Nos dias atuais, há um crescente interesse em temas relacionados à Análise e à Física (Paiva, Alves, 2018)

Conforme Albuquerque (2004), Geometria Diferencial ainda apresenta importância correlacionando a outro aspecto, com os outros saberes matemáticos envolvidos nessa grande área da Matemática:

> Sem dúvida, a geometria diferencial joga um papel excepcional, mesmo na matemática, toda se tal se pudesse considerar, porque afinal ela conjuga muitas e variadíssimas das matérias da álgebra e da análise. Aparece nas soluções de problemas de várias variáveis reais ou complexas, tratadas como espaços geométricos de dimensão qualquer, ou nos problemas de variáveis discretas, tratadas como abstrações das anteriores (referimo-nos às variedades algébricas); informa-nos sobre as propriedades intrínsecas da morfologia do espaço e suas medidas (Prefácio de Albuquerque, 2004).

De forma consoante, Grande, Nunes e Silva (2015) enfatizam o viés de Albuquerque (2004) afirmando que o estudo de GD permite a aplicação de diversos conceitos matemáticos, tais como curvas, no plano e no espaço, superfícies, funções diferenciáveis, derivada e integral, paralelismo, ortogonalidade e operações entre vetores, além de interrelacionar diversos ramos da Matemática, como o Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear.

No entanto, para a compreensão das definições e conceitos relacionados a GD, necessita-se de diversos pré-requisitos, como a aplicação dos conceitos de funções diferenciáveis, derivada e integral, paralelismo, ortogonalidade e operações entre vetores. Tais conceitos aliados ao grau de complexidade e abstração envolvidos nos conteúdos de GD, pode desenvolver alguns entraves ao estudar mencionado tópico (Paiva, 2019).

A fim de compreender o ensino de GD, optamos por investigar como o tema está sendo abordado em um livro texto básico empregue na disciplina de GD, utilizando a metodologia de pesquisa conhecida como Engenharia Didática. Por meio da investigação do tema em livros, pretendemos identificar e descrever alguns elementos de ruptura[1] e elementos de transição[2] no âmbito do corpo teórico de nosso interesse.

Metodologia de investigação: Engenharia Didática

A Engenharia Didática- ED pode ser entendida como a aplicação de uma abordagem sistemática e metodológica para projetar, organizar e implementar sequências de ensino. A estrutura da ED permite que se realize uma análise do objeto matemático explorado, para que possamos desenvolver situações didáticas[3]:

> (...) devemos realizar, a princípio, seguintes considerações: analisarmos se o que está sendo proposto nas situações-problemas são conhecimentos pertinentes, no sentido, de estabelecer uma relação entre os saberes visados e os já constituídos; identificarmos no escopo das situações suas variáveis de comando e escolhermos aquelas necessárias de estudo; estudarmos se as situações escolhidas são consistentes (Dos Santos, 2017, p.21).

---

[1] Alves(2011,p.61) define elementos de ruptura como os elementos que atuam como entraves, dificultando à aprendizagem.

[2] Alves(2011) define elementos de transição como os elementos presentes nas trajetórias de alteração de um conceito matemático em virtude da dimensão e/ou espaço topológico que se encontra, por exemplo, os conceitos envolvidos na alteração da compreensão do limite em $\mathbb{R}$ para o conceito de limite em $\mathbb{R}^n$.

[3] A situação didática é formada por atividades que podem ser definidas como sendo os “meios” usados pelo professor a fim de que o aluno vivencie as experiências necessárias ao desenvolvimento de competências e habilidades fazendo com que a aprendizagem seja significativa (Pommer,2008).

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v3.e2024033 ISSN 2965-6753

Além disso, a ED oportuniza prever estratégias de resolução que os alunos possam desenvolver durante a situação didática, caracterizando os conhecimentos e saberes matemáticos prévios necessários para que o aluno durante a aplicação:

> prevermos possíveis dificuldades de resolução por parte dos alunos; identificarmos novos conhecimentos e/ou métodos de resolução que os alunos possam adquirir e prevermos os saberes/conhecimento se/ou métodos de resolução que devemos institucionalizar” (Dos Santos, 2017, p.21).

Portanto, ao identificar os saberes prévios, o professor também deve antecipar possíveis dificuldades que os alunos possam enfrentar. Essas dificuldades podem surgir de lacunas nos conhecimentos anteriores ou de conceitos novos e complexos que a atividade introduz.

A ED ainda permite que se desenvolva um conjunto de situações com atividades e interações planejadas por um educador com o objetivo de promover o aprendizado de um conceito, habilidade ou conteúdo específico.

Desse modo, essa metodologia apresenta a caracterização de uma pesquisa experimental pelo contexto em que é aplicada e pelo modo de validação associado. O que envolve a comparação entre as análises iniciais e finais da pesquisa, conhecidas como análises a priori e análises a posteriori. Uma das particularidades dessa metodologia é que essa validação pode ser realizada internamente, sem a necessidade de um pré-teste ou pós-teste (Alves, 2018).

Em relação a sistematização prevista pela ED é composta por quatro fases: *análises prévias, análises a priori, experimentação, análise a posteriori e validação*. Na fase dialética das análises prévias ocorre a identificação do problema didático, determinando qual seria o problema específico de ensino ou aprendizagem que será abordado.

Portanto, essa fase pode incluir as dificuldades comuns encontradas pelos alunos na compreensão de um determinado conceito ou processo, bem como a definição dos objetivos a serem alcançados com o experimento didático (Almouloud, 2007). Nessa etapa, o pesquisador pode realizar uma revisão da literatura e, ao definir o problema, formular hipóteses específicas sobre como diferentes abordagens didáticas podem afetar o aprendizado dos alunos (Almouloud, 2007).

Na segunda fase da Engenharia Didática (ED), denominada *análises a priori*, o pesquisador é incumbido de desenvolver e examinar uma série de situações didáticas. O objetivo é facilitar a superação dos obstáculos epistemológicos [4] que os alunos possam enfrentar em relação ao assunto estudado. Essa abordagem visa não apenas aprimorar o entendimento dos alunos, mas também validar as hipóteses de pesquisa elaboradas na fase anterior (Almouloud, 2007).

A terceira fases dialética, a experimentação, consiste na implementação prática das situações didáticas planejadas durante a análise a priori. É o momento em que os resultados teóricos são colocados em prática, permitindo a obtenção de resultados empíricos que complementam a análise teórica (Almouloud, 2007).

Durante essa fase, todo o dispositivo planejado é aplicado na sala de aula, proporcionando uma oportunidade para verificar a eficácia das estratégias pedagógicas propostas. Na última etapa, a Análise a Posteriori e Validação, ocorre uma investigação detalhada sobre a produção dos alunos, observando seu comportamento durante o desenvolvimento da sequência didática e utilizando os dados coletados ao longo da experimentação (Artigue,1995).

No contexto da Engenharia Didática (ED), a investigação acerca do ensino de GD, e envolveu apenas a etapa das *análises prévias*. Com o intuito de compreender uma parte da atual estrutura de ensino de GD, se realizou um estudo do conteúdo teórico e identificação dos principais conceitos, dificuldades e obstáculos que os alunos podem encontrar ao estudar esse conteúdo por meio de uma análise prévia de um dos principais livro texto dessa disciplina.

Perspectiva de investigação do problema

Desse modo, por meio da sistemática dessa metodologia de pesquisa, nas fases iniciais, as análises prévias, determinamos as principais dimensões que definem o problema a ser estudado e como se relacionam com o sistema de ensino, por exemplo: as dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas (Almouloud,2007).

De modo mais detalhado, esclarecemos que buscamos identificar os problemas de ensino relacionados aos conceitos basilares de curvas e incipientes de superfície.

[4] Conforme Bachelard(1995) obstáculos epistemológico tratam-se de elementos que pode retardar, e mesmo impedir um processo de entendimento do estudante submetido a uma ação intencional de ensino .

A análise do campo epistêmico em livros, busca responder a seguinte questão norteadora do nosso objeto de investigação:

1ª) Uma mediação condicionada pela abordagem dos livros de GD não promove a visualização e o entendimento gráfico-geométrico (local) atinente aos conceitos dessa área;

2ª) Situações de aprendizagem definidas pelos exercícios propostos pelos autores de livros de GD permitem apenas a aquisição de habilidades manipulativas de equações, que incidem ou acarretam resultados de significado restrito, sem um entendimento amplo dos conceitos.

Desse modo, enfatiza-se a necessidade em realizar o estudo, cujo objetivo envolvesse a identificação de elementos capazes de atuar positivamente no referido contexto de ensino.

Análise prévia do ensino de GD por meio de um livro clássico

Nessa seção, seguindo a sistematização prevista pela metodologia de pesquisa adotada, tendo em vista um melhor entendimento do ensino atual do conteúdo de nosso interesse, apresentamos uma consulta a um livro clássico aplicados pela academia no ensino de GD, influenciada pela perspectiva de Alves (2012; 2013a; 2013b; 2014; 2016; 2017), no que concerne ao estudo e identificação de entraves no entendimento de conceitos matemáticos, todavia no contexto da GD.

Seleção e fundamentação para a análise de um livro clássico

Ao analisarmos um livro clássico aplicado como recurso didático em sala de aula, conhecemos previamente a abordagem, o método utilizado para trabalhar determinados conceitos e as possibilidades existentes de ensino do conteúdo através desse material. Nesse viés, o Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN reconhece a ampla interferência do livro adotado no ensino-aprendizagem de um conteúdo:

> O livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento (Brasil, 1997, p. 67).

Desse modo, por meio da análise de um livro didático podemos inferir "a existência de falhas na sua composição, às vezes na forma de apresentação do conteúdo, nas atividades propostas, no desenvolvimento dos conceitos no decorrer das páginas, ou ainda de

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v3.e2024033 2965-6753

inadequação à realidade local, às práticas sociais do grupo escolar em questão” (ROSA et al. 2012, p.3).

À vista dos motivos apresentados, destacamos a importância de tal análise, e reconhecemos, em nosso caso, a existência de um extenso rol de compêndios da literatura pertinente. Em relação a essa literatura podemos destacar no contexto nacional, Teneblat (2008), Pires(2015), Do Carmo (2016), Araujo (2018), Neto (2014), e no contexto internacional, Struik (2012), Willmore (2013), Montiel (2009), Palmas *et al.* (2005).

Assumimos interesse particular pelo livro de Teneblat, a escolha desse compêndio se deve ao fato dessa obra tratar-se do livro-texto trabalhado em cursos introdutórios de Geometria Diferencial na graduação de licenciaturas e bacharelados em Matemática.

Análise do livro “Introdução a Geometria Diferencial” de Teneblat

Devido a constituição das teorias adotadas e discutidas nas seções passadas, a análise foi realizada na perspectiva de Alves (2011), realizando uma comparação dos pré-requisitos necessários para um estudo do nosso objeto matemático, que se iniciam com elementos de Cálculo de Uma Variável -CUV, e de elementos de Cálculo de Várias Variáveis -CVV.

Ademais, ainda apresentaremos um olhar para as situações-problema de GD, proposta pelos autores e a significação/representação dos conceitos matemáticos envolvidos; se tais obras exploram os conceitos do GD no espaço $\mathbb{R}^3$, com o intuito de proporcionar a evolução das habilidades de *percepção* e *visualização*; se os autores relacionam as definições algébricas dos conceitos de GD com as suas respectivas significações gráfico-geométrica.

O livro “Introdução a Geometria Diferencial” de Teneblat, tem o objetivo “servir de como livro texto para um curso introdutório de Geometria Diferencial, em nível de graduação” (Prefácio de Teneblat. Apresentando “a teoria local das curvas e superfícies, no espaço euclidiano, admitindo como pré-requisitos os cursos básicos de cálculo diferencial e equações diferenciais” (Prefácio de Teneblat).

O livro de Teneblat a obra é dividida em cinco capítulos, iniciando o estudo acerca de GD recordando, no Capítulo 0, alguns pré-requisitos de álgebra linear, cálculo diferencial e cálculo vetorial de funções de uma ou mais variáveis necessários para o entendimento dos conceitos dessa área, como dependência linear, definições de funções lineares, funções diferenciáveis etc.

Assim, a autora inicia o roteiro de descrições e formulações de definições, formulando os elementos básicos e preliminares de certas noções topológicas, dentre as quais destacamos:

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v3.e2024033 2965-6753

o espaço euclidiano de dimensão três, $\mathbb{R}^3$, ou seja, o conjunto de termos ordenados de números reais $p = (x, y, z)$ para funções de uma variável.

Em relação a funções de várias variáveis, a autora define o espaço euclidiano de dimensão n, $\mathbb{R}^n$, definindo para isso o conceito de funções coordenadas. Segundo a autora, ao tomarmos uma função ou aplicação F de um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, denotado por $F: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, para cada $p \in A$, associa um único ponto $F(p) \in \mathbb{R}^m$.

Desse modo, tal função (ou aplicação) pode ser representada por $F(p) = (F_1(p), F_2(p), \ldots, F_m(p))$, ao considerarmos $p = (x_1, \ldots, x_n)$, podemos reescrever a representação da função como: $F(x_1, \ldots, x_n) = \left(F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n)\right)$. Determinando que as funções $F_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1,2, \ldots, m$ são as funções coordenadas de F (Teneblat, 2008).

No entanto, Teneblat (2008, p.15) salienta que "embora o nosso interesse esteja apenas nos casos em que n e m assumem os valores $1{,}2$ ou 3, vamos enunciar os conceitos e resultados básicos para o caso geral".

Assim a autora segue nesse sentido topológico, discriminando a ideia de *bola aberta* em $\mathbb{R}^n$ de centro $p_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio $\varepsilon > 0$, como um conjunto denotado por $B_\varepsilon(p_0)$, dos pontos $p \in \mathbb{R}^n$ que distam de p_0 menos que ε , denotando em simbologias por $B_\varepsilon(p_0) = \{ p \in \mathbb{R}^n; |p - p_0| < \varepsilon \}$. Dessarte, Teneblat ainda precisa que um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ é dito *aberto* em $\mathbb{R}^n$ se para todo $p \in A$ existe uma bola aberta $B_\varepsilon(p) \subset A$. Ademais, explana-se como subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ que contém $p_0 \in \mathbb{R}^n$, como uma *vizinhança* de $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Outrossim, um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ é dito *fechado* em $\mathbb{R}^n$ se o seu complemento, isto é $\mathbb{R}^n - D$, é aberto em $\mathbb{R}^n$. Além disso, a autora apresenta os conceitos de *ponto de acumulação*, um conjunto *compacto* para introduzir os conceitos de limite e continuidade de uma função de duas ou mais variáveis.

Desse modo, atinamos elementos que se diferenciam do Cálculo de uma Variável – CUV, devido ao aumento dimensional dos conceitos formulados, o que pode atuar como um *elemento de ruptura* (Alves, 2011).

Por esse motivo, devemos dispor de uma certa cautela ao explicar esses tópicos de GD, no entanto, na perspectiva de Teneblat (2008, p.1) , observamos a ausência de tal cautela em relação as mudanças topológicas , já que segundo a autora foi "conveniente reunir neste capítulo inicial as noções necessárias muito embora, admite-se que são do conhecimento do

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v3.e2024033 2965-6753

leitor", recomendando que "a leitura do texto seja iniciada com o estudo de curvas planas, no Capítulo 1, recordando os conceitos do Capítulo 0, à medida que se tornarem necessários"(Prefácio de Teneblat).

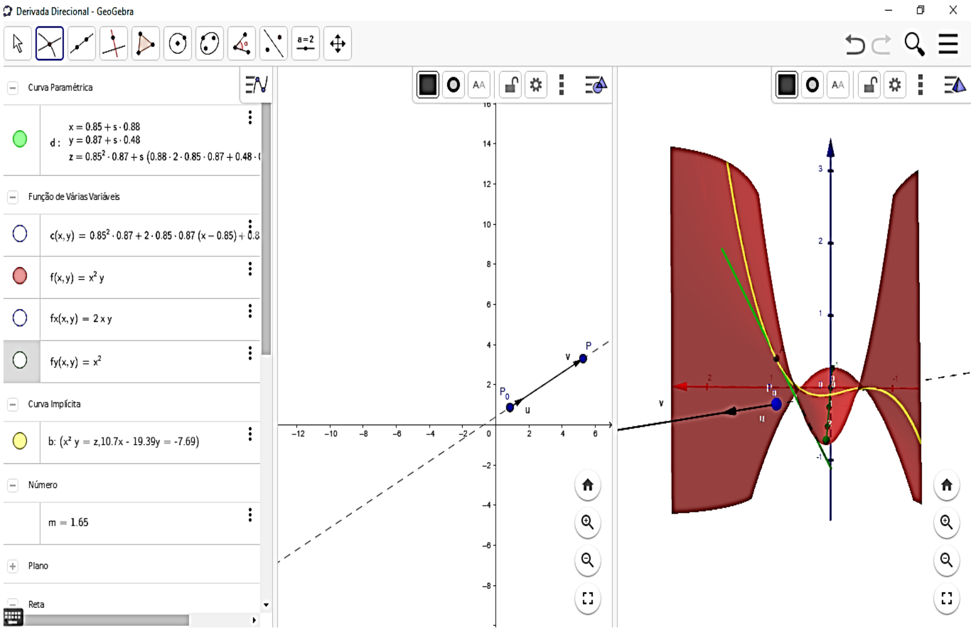
Em relação ao conceito de limite, a autora define que o limite de uma função vetorial, de forma análoga ao conceito de limite de uma função real, assim Teneblat estabelece que o limite de $\alpha(t)$ é L quando dado t se aproxima de t_0, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que , se $0 < |t - t_0| < \delta$, então $|\alpha(t) - L| < \varepsilon$. Ou seja, se $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e $L = (l_1, l_2, l_3)$, então $\lim_{t \to t_0} \alpha(t) = L$,se e só se, $\lim_{t \to t_0} x(t) = l_1$, $\lim_{t \to t_0} y(t) = l_2$, $\lim_{t \to t_0} z(t) = l_3$. A autora retoma o conceito de limite de duas ou mais variáveis, após a explanação de outras operações com a função vetorial, precisando que o limite de uma função F de duas ou mais variáveis, dada por $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, em que A trata-se de um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, admite valor L quando $p \epsilon A$ tende a p_0 se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que, se $0 < |p - p_0| < \delta$, então $|F(p) - L| < \varepsilon$, denotando por $\lim_{t \to t_0} F(p) = L$.

Veja que a abordagem realizada por Teneblat, não menciona os elementos de transição desses conceitos, além de não fazer indicativo ao leitor de nenhuma mudança do espaço topológico, apesar do limite das funções apresentar diferenças em virtude da dimensão e/ou da quantidade de variáveis.

Prosseguindo, acerca da abordagem dos conceitos de diferenciabilidade, encontramos outros elementos, em que também devemos ter cautela, por se tratarem de elementos de ruptura, pois as noções de diferenciabilidade de funções vetoriais de várias variáveis apresentam um conceito singular, intitulado de *derivada direcional*, definida por Teneblat(2008) como: uma função $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que A é um conjunto aberto, fixado um $p_0 \in A$ e w um vetor não-nulo de $\mathbb{R}^n$, dada por : $\lim_{t \to 0} \frac{F(p_0 + tw) - F(p_0)}{t}$ .Com o intuito, de apresentar tal ruptura, produzimos no *software* Geogebra, uma representação desse conceito geométrico.

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v3.e2024033 2965-6753

Figura 1 – Representação do conceito de derivada direcional



Fonte : Paiva(2019, p.58)

Na Figura 1, explorou-se o gráfico da função $f(x, y) = x^2 y$, em vermelho, e a descrição da curva implícita que representa a função ,em amarelo , e a derivada dessa função em virtude das coordenadas, $f_x(x, y) = 2xy$ e $f_y(x, y) = x^2$, em direção ao vetor $\overrightarrow{PP_0}$ resultando em uma reta ,na cor verde.

Destarte, o significado geométrico da derivada direcional de uma função de várias variáveis diferenciável, intuitivamente representa a taxa instantânea de variação da função, movendo-se através de um ponto *x* com uma velocidade especificada por um vetor em relação esse determinado ponto *x*. Generalizando assim, a noção de *derivada parcial*, em que a taxa de mudança é tomada ao longo de uma curva em um sistema de coordenadas curvilíneo, com todas as outras coordenadas sendo constantes.

Teneblat (2008, p. 20) realiza uma relação entre esses dois conceitos de derivada, difundindo para a base canônica $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ do espaço topológico $\mathbb{R}^n$, “as derivadas direcionais de F em p_0 nas direções de um vetor da base são denominadas *derivadas parciais* de F em p_0 ”.

Figura 2 – Definição que correlaciona os conceitos de *derivada direcional* e *derivada parcial*,

proposto por Teneblat (2008)

Se $F(x_1,\cdots,x_n)=(F_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,F_m(x_1,\cdots,x_n))$, então a derivada parcial de F em p_0 na direção de e_i é denotada por $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p_0)$ ou $F_{x_i}(p_0)$ e é igual a

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p_0)=\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(p_0),\cdots,\frac{\partial F_m}{\partial x_i}(p_0)\right).$$

Fonte: Teneblat (2008, p. 20)

A autora sucede , a noção de derivada parcial para derivada de segunda ordem , se $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p)$ existe, para todo $p\ \in A$,um conjunto aberto, definindo a função $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p): A\ \rightarrow\ \mathbb{R}^m$ que, para cada $p\ \in A$, associa $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p)$. De forma mais sucinta, a autora utiliza a seguinte simbologia:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}=F_{x_i x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}=\ F_{x_i x_j} \end{cases}.$$

Entrevemos que a autora descreve de modo sucinto todos esses conceitos de derivabilidade para que o aluno, possa compreender e distinguir o conceito de *diferenciabilidade* de uma função, um conceito crucial para o entendimento dos assuntos de GD.

Assim, dizemos que uma função $F: A\subset\ \mathbb{R}^n\ \rightarrow\ \mathbb{R}^m$ é *diferenciável* de F em p_0 se existe uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, denotada por $dF_{p0}: \mathbb{R}^n\ \rightarrow\ \mathbb{R}^m$, tal que, para todo vetor $w\ \in\ \mathbb{R}^n$, $F(p_0+w)=F(p_0)+\ dF_{p0}(w)+R(w)$, onde $\lim\limits_{t\rightarrow t_0}\left(\frac{R(w)}{|w|}\right)=0$, em que aplicação dF_{p0} é denominada *aplicação diferencial* de F em p_0.

A função F é dita *diferenciável* se F é diferenciável em p, para todo $p\ \in A$. Podendo verificar que, se F é diferenciável em p_0, então, para todo vetor $w\ \in\ \mathbb{R}^n$, $dF_{p0}(w)=\lim\limits_{t\rightarrow t_0}\frac{F(p_0+tw)-F(p_0)}{t}$. Portanto, se "$F$ é diferenciável em p_0, então a derivada direcional de F em p_0 existe em qualquer direção (Teneblat, 2008, p.21)". Entretanto, a autora ressalta que a recíproca não é verdadeira, isto é, uma função pode ter todas as derivadas direcionais em um ponto, sem ser diferenciável no ponto.

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v3.e2024033 2965-6753

Dessa forma, assumimos por meio da análise do capítulo 0 livro de Teneblat(2008), que o conceito de derivada parcial em consonância com o conceito de derivada direcional, atua como um elemento de transição entre os conceitos de derivabilidade de várias variáveis, abordado no curso de CVV, para o conceito de diferenciabilidade, abordado no curso de GD.

Figura 3 – Quadro sistemático-simbólico relativo a evolução do conceito de derivabilidade de CUV ao conceito de diferenciabilidade estudado no curso de GD.

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\text{TRANSIÇÃO}} \lim_{t \to 0} \frac{F(p_0+tw) - F(p_0)}{t} \xrightarrow{\text{TRANSIÇÃO}} dF_{p0}(w) = \lim_{t \to t_0} \frac{F(p_0+tw) - F(p_0)}{t}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p_0) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(p_0), \ldots, \frac{\partial F_m}{\partial x_i}(p_0)\right)$$

Fonte: Paiva (2019, p.60)

Na Figura 3, divisamos as mudanças notacionais e acentuamos também, as alterações operacionais e conceituais, exigidas em função da variação do espaço topológico, que envolve a conceituação do conceito de derivada, para a compreensão da definição de diferenciabilidade, desde a variável real até o tratamento aplicado em Geometria Diferencial.

Ainda nesse capítulo, a autora enumera algumas propriedades de diferenciabilidade, introduzindo o conceito de *difeomorfismo*, quando uma função diferenciável de classe C^k, que possui uma inversa de também diferenciável de classe C^k, denominando *difeomorfismo* de classe C^k. Concluindo o capítulo com o enunciado fundamental do cálculo diferencial, denominado *teorema da função inversa*. Tal teorema, toma $F: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável de classe C^k e $p_0 \in A$ tal que dF_{p0} é injetora. Então, existe uma vizinhança U de p_0 contida em A, tal que $F(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e a restrição de F a U é um difeomorfismo de classe C^k, de U sobre $F(U)$. Em relação a esse teorema a autora não fornece nenhuma demonstração e/ou significação geométrica, apenas o cita com a justificativa que ele será empregado posteriormente, tal fato possivelmente se atribui por se tratar de um teorema de outro curso intitulado Análise no $\mathbb{R}^n$.

Desta maneira, a autora conclui os conteúdos básicos para o entendimento da teoria de GD, incluindo alguns exercícios ao final do capítulo para que o aluno aplique esses conhecimentos prévios. Entretanto, em tais exercícios divisamos um prevalecimento do caráter algorítmico dos conceitos trabalhados, não realizando também nenhuma indicação do seu

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v3.e2024033 2965-6753

contexto histórico e/ou epistemológico.

Figura 4 – Exemplo de exercícios propostos por Teneblat(2008) no capítulo 0 (introdutório)

2.1 Exercícios

1. Considere as seguintes funções $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

a) $F(x, y) = (x, y, x + y)$

b) $F(x, y) = (x\cos y, x\operatorname{sen} y, 2x)$

c) $F(x, y) = (x + y, (x + y)^2, (x + y)^3)$.

Em cada caso, verifique que F é diferenciável e obtenha a matriz jacobiana. Indique os pontos $p \in \mathbb{R}^2$ onde dF_p não é injetora.

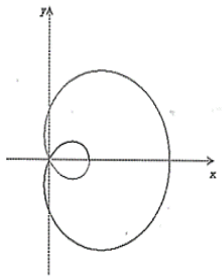
Fonte: Teneblat (2008, p. 25)

No ponto seguinte, capítulo 1, a autora descreve o conceito de curva fornecendo-se as coordenadas de seus pontos como funções de uma variável real, identificamos exemplos interessantes apresentados pela autora, ao apresentar tal conceito e demonstrar a distinção entre curvas parametrizadas diferenciáveis e curvas parametrizadas não diferenciáveis.

Figura 5- Exemplos de curvas apresentados por Teneblat(2008*)*

$$\alpha(t) = (\cos t\,(2\cos t - 1),\ \operatorname{sen} t\,(2\cos t - 1)),\quad t \in \mathbb{R},$$

é denominada *cardióide*



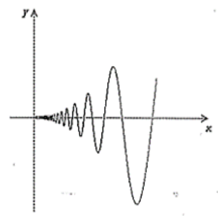


Figura 5

não é uma curva parametrizada diferenciável (ver Figura 5), já que a função

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \\ t^2 \operatorname{sen}\frac{1}{t} & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

não é diferenciável de classe C^∞.

Fonte: Teneblat(2008,p.29, figura à esquerda, p. 3 figura à direita)

Além disso, evidenciamos na obra de Teneblat(2008) que a noção de vetor tangente foi bem explorada por meio de registros algébrico e registro gráfico em 2D , correlacionando o seu significado geométrico ao conceito de derivada, como é apresentado na Figura 6.

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v3.e2024033 2965-6753

Figura 6 – Concatenação dos conceitos vetor tangente com o conceito de derivabilidade de uma função de uma variável.

A definição de vetor tangente coincide com a noção intuitiva que temos de um vetor tangente a uma curva, isto é, um vetor cuja direção é a direção limite de cordas, determinadas por um ponto $\alpha(t)$ e pontos próximos $\alpha(t+h)$, quando h tende para zero. De fato, fixado $t \in I$, para $h \neq 0$ tal que $t+h \in I$,

$$\frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h}$$

que é o vetor de $\alpha(t)$ a $\alpha(t+h)$ multiplicado pelo escalar $\frac{1}{h}$ (ver Figura 7). Observamos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h}$$

é exatamente a definição da derivada da função α em t.

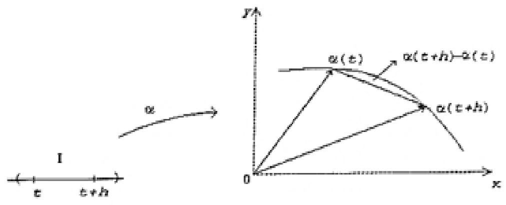


Figura 7

Fonte: Teneblat(2008, p.33)

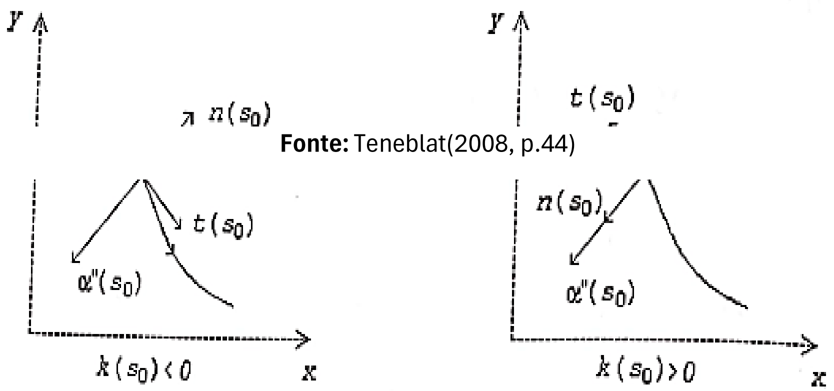
Em contrapartida, não observamos a exibição desse conceito geométrico, vetor tangente, nas curvas apresentadas, se limitando apenas a manipulação algébrica nos exemplos fornecidos. Provocando uma dissociação do significado geométrico de vetor tangente ao conceito algébrico nas curvas. Outra importante definição fornecida, decorrente do conceito anterior, é intitulada vetor normal, que é imprescindível para a formulação de outros conceitos correlacionados a curvas planas, entre eles os conceitos: curvatura, Teorema Fundamental das Curvas e Fórmulas de Frenet.

A autora define a curvatura $k(s)$ como um fator de proporcionalidade que correlaciona os vetores normal e tangente, de modo mais sucinto, Teneblat (2008, p.43) desenvolve por meio de deduções algébricas para curvas parametrizadas pelo comprimento do arco - ppca *(*em que o comprimento do arco indepentende do parâmetro é unitário), que a curvatura é dada por:

$$\begin{cases} t'(s) = \ \ k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) \end{cases}.$$

Ademais, a autora ainda correlaciona o significado desse conceito ao seu valor, determinando que se $k(s_0) > 0$ temos que $n(s_0)$ tem o mesmo sentido de $\alpha''(s_0)$, ou seja, a derivada no vetor tangente no ponto s_0, do mesmo modo, se $k(s_0) < 0$ então $\alpha''(s_0)$ e $n(s_0)$ têm sentido opostos, a seguir vemos a ilustração de tal fenômeno pela autora, por meio da Figura 7.

Figura 7– Significação gráfico-geométrica do sinal da curvatura em curvas planas



Fonte: Teneblat(2008, p.44)

Posteriormente, a autora estende o conceito curvatura para curvas que não se enquadrem na definição anteriormente citada. Contudo, na Figura 8, podemos observar que apesar da autora fornecer o significado geométrico dos conceitos anteriores ao defini-los, não verifica-se aplicação desses conceitos e a suas respectivas visualizações nos exemplos, o que poderia amparar na aquisição de conceitos.

Figura 8 – Exemplificação de aplicação dos conceitos de vetores tangente, normal e da função curvatura propostos por Teneblat

a) Seja $\alpha(s)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco cujo traço é uma reta. Então a curvatura é identicamente nula. De fato, seja

$$\alpha(s) = (as + x_0,\ bs + y_0), \quad s \in I,$$

onde a e b são constantes e $a^2 + b^2 = 1$. Como $t(s) = \alpha'(s)$ é constante, temos que $t'(s) = 0$ e portanto $k(s) = 0$, $\forall s \in I$.

b) Consideremos a curva

$$\alpha(s) = \left(a + b\cos\frac{s}{b},\ c + b\ \mathrm{sen}\frac{s}{b}\right),\ s \in \mathbb{R},\ b > 0,$$

cujo traço é uma circunferência de centro (a, c) e raio b. Neste caso

$$t(s) = \left(-\mathrm{sen}\frac{s}{b},\ \cos\frac{s}{b}\right)$$
$$n(s) = \left(-\cos\frac{s}{b},\ -\mathrm{sen}\frac{s}{b}\right).$$

Logo

$$k(s) = \langle t'(s),\ n(s)\rangle = \frac{1}{b}.$$

Finalizaremos a análise desse capítulo, estabelecendo que a autora aborda a teoria local das curvas planas associando as fórmulas de Frenet, obtidas considerando um “diedro ortonormal associado naturalmente a uma curva plana” (Teneblat, 2008, p.61).

No capítulo seguinte, a autora desenvolve um estudo análogo, considerando um triedro ortonormal associado a uma curva regular de $\mathbb{R}^3$. Desse modo, a autora dedica-se ao estudo de curvas espaciais de dimensão três, introduzindo de modo análogo a muitos conceitos basilares de curvas planas. Segundo a autora “as noções de vetor tangente, curva regular e mudança de parâmetro para curvas não são motivadas pelas mesmas considerações já vistas para curvas planas, portanto, serão introduzidas sem muitos comentários” (TENEBLAT,2008, p.57).

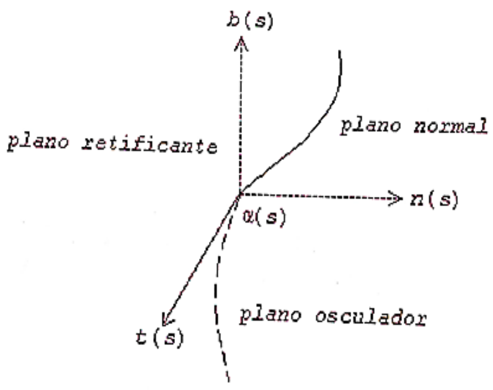
O conceito curvatura é definido pela autora como “a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção” (Teneblat ,2008, p.61), sendo obtido em uma curva $\alpha(t)$ ppca algebricamente como a norma do vetor $\alpha''(s)$, apesar de ser uma significação geométrica para curvatura em curvas de dimensão três, não observamos uma exemplificação visual de tal interpretação. Além disso, a autora não relaciona o conceito para curvas espaciais com o conceito em curvas planas, podendo ocasionar uma distinção do significado algébrico/geométrico do conceito dependendo do espaço vetorial trabalhado.

Em relação ao vetor normal de curvas espaciais ppca com $k(s) > 0$, a autora o define como o quociente $\alpha''(s)$ e a curvatura, para posteriormente, correlacioná-lo através do vetor tangente. Nesses viés, evidenciamos que a noção de vetor tangente não foi bem explorada por meio de registros algébrico e registro gráfico em 3D .

Ademais, a autora indica a existência de um outro vetor em $\mathbb{R}^3$, intitulado vetor binormal ($b(s)$), determinando o como produto vetorial entre os vetores tangente e normal a um ponto de uma curva $\alpha(t)$. Segundo Teneblat (2008) a tripla de vetores (tangente, normal e binormal) determinam um referencial ortonormal, intitulado Triedro de Frenet.

Teneblat (2008) ainda explana acerca dos planos formados por cada par de vetores desse referencial ortonomal, determinando que o plano que contém $\alpha(s)$ e é normal ao vetor $t(s)$ é o Plano Normal à curva , o plano que contém $\alpha(s)$ e é normal a $b(s)$ é denominado Plano Osculador , e por fim, o plano que contém $\alpha(s)$ e é normal a $n(s)$ trata-se do Plano Retificante, na Figura 9, podemos vê uma representação desses planos produzidas pela a autora.

Figura 9- Representação dos planos gerados pelos vetor normal,tangete e binormal.

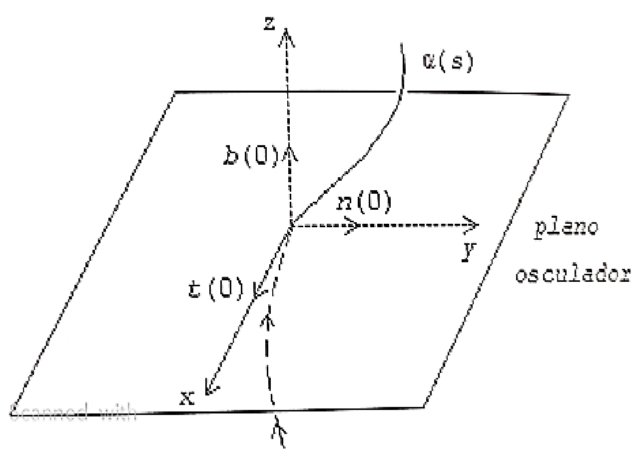


Fonte : Teneblat(2008, p.63).

Outro importante conceito explanado em curvas nessa dimensão, trata-se da torção $\tau(s)$ de uma curva, estabelecido como uma constante de proporcionalidade entre os vetores $b(s)'$ e $n(s)$. Teneblat (2008, p.65) indica que o módulo do vetor torção "mede a velocidade com que o plano osculador varia". Contudo, apesar da autora fornecer uma significação geométrica para o conceito torção em curvas de dimensão três, não observamos uma exemplificação visual de tal interpretação, de modo afim ao acontecido no conceito curvatura em dimensão três.

Em contrapartida, a autora explana propriedades decorrentes do sinal da constante torção, por meio de representações canônicas das curvas. A título de exemplo, se a torção $\sigma(s_0) < 0$, então para todo s suficientemente próximo de s_0, a curva $\alpha(s)$ pertence ao semi-espaço determinado pelo plano osculador, que contém $-b(s_0)$, tal representação dessa propriedade pode ser observada na Figura 10.

Figura 10- Exemplificação de uma propriedade decorrente da $\boldsymbol{\sigma(s_0) < 0}$



https://doi.org/10.21439/2965-6753.v3.e2024033 2965-6753

Fonte: Teneblat(2008, p. 80)

Outro importante conceito apresentado nesse capítulo, são as fórmulas do triedro de Frenet, que correlacionam os vetores tangente, normal, e binormal por meio dos conceitos torção e curvatura, obtidas por meio de métodos de derivabilidade, as aplicações de tais fórmulas, se sucedem como caracterização de curvas (determinando se a curva é plana, se trata-se de uma circunferência, hélice, etc).

Desse modo, ao final do capítulo não verificamos a existência de significação geométrica do Triedro de Frenet nem de suas respectivas fórmulas, a seguir na Figura 11, apresentamos uma exemplificação de exercícios trabalhados nesse capítulo, em que evidenciamos um prevalecimento do caráter algorítmico.

Figura 11- Exemplificação de questões com a abordagem dos conceitos relacionados ao Triedro de Frenet

1. Considere as seguintes curvas regulares:

   a) $\alpha(t) = (4\cos t,\ 5 - 5\ \operatorname{sen} t,\ -3\cos t),\ t \in \mathbb{R}$,

   b) $\beta(t) = (1 - \cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t),\ t \in \mathbb{R}$,

   c) $\gamma(t) = (e^t,\ e^{-t},\ \sqrt{2}\,t),\ t \in \mathbb{R}$.

   Reparametrize essas curvas por comprimento de arco, obtenha o triedro de Frenet, a curvatura e a torção de cada curva.

2. Calcule a curvatura e a torção das seguintes curvas:

   a) $\alpha(t) = (t,\ t^2,\ t^3)$,

   b) $\beta(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ e^t)$,

   c) $\gamma(t) = (t,\ \cosh t,\ \operatorname{senh} t)$.

Fonte : Teneblat(2008, p. 69)

No capítulo 3, "tendo em vista o caráter introdutório do curso, o estudo das superfícies é desenvolvido para *superfícies parametrizadas regulares*" (Prefácio de TENEBLAT,2008). Estas superfícies apresentam-se como uma extensão do conceito de curva parametrizada regular. Assim a teoria de superfícies é desenvolvida por meio de derivadas parciais, considerando os vetores X_u, X_v, N associados a uma superfície $X(u,v)$, em que estes vetores X_u, X_v, N formam uma base de $\mathbb{R}^3$ que, de modo geral, não é ortonormal.

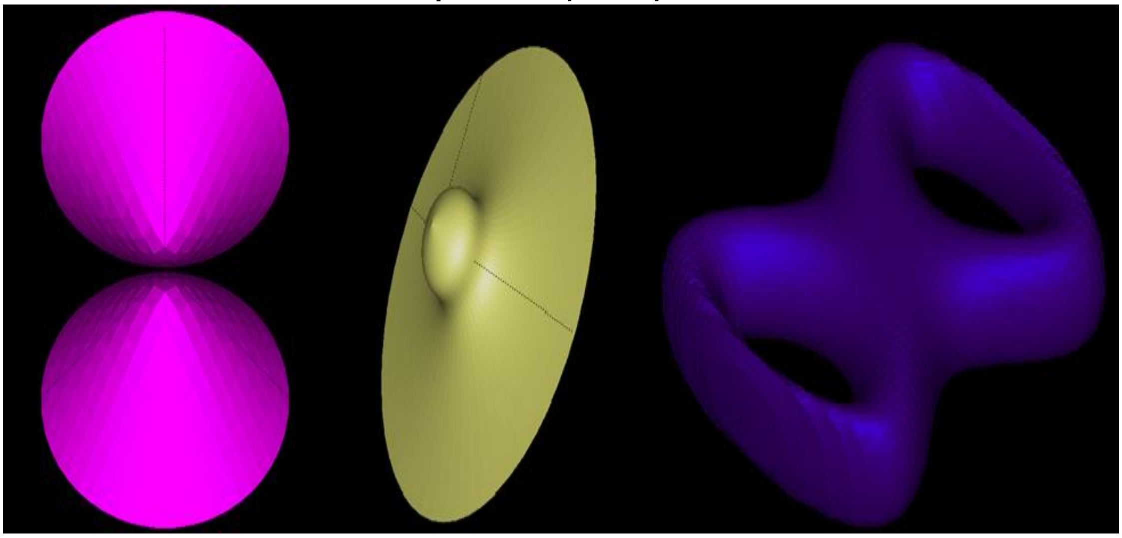
Apesar da autora, não realizar indicação do seu contexto histórico/epistemológico do conceito superfícies, ao final desse capítulo, é introduzido algumas aplicações da computação

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v3.e2024033 ISSN 2965-6753

gráfica por meio do programa "ACOGEO"(Apoio Computacional a Geometria Diferencial) com o intuito de visualizar tanto curvas e superfícies no espaço euclidiano como os principais resultados da geometria diferencial apresentados no livro.

O programa "ACOGEO" foi desenvolvido pelo Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, possui algumas expressões de curvas e superfícies, que podem ser rotacionadas sobre os eixos da tela, transladar e centralizar o ponto de observação. A exibição das visualizações proporcionadas por esse programa, são apresentadas na Figura 12, a seguir

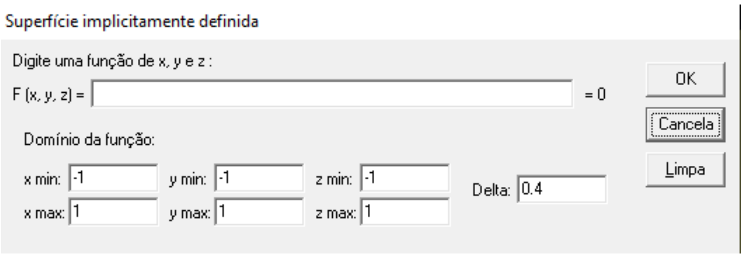
Figura 12 – Superfície 1 (Hipérbole de duas folhas); Superfície 2 (Chapéu de Sherlok); Superfície 3 (Bitoro)



Fonte : http://www.mat.unb.br/~keti/ - Programa ACOGEO

Apesar do programa ainda permitir ao usuário plotar superfícies, definindo os intervalos de variação, expressado na Figura 13, o *software* possui algumas limitações, pois não proporciona recursos para a realização de um estudo dos conceitos matemáticos relacionados a superfícies, explanação de propriedades e teoremas.

Figura 13 – Comandos para plotar superfícies no programa *ACOGEO*



Fonte : http://www.mat.unb.br/~keti/ - Programa ACOGEO

Por fim, no capítulo IV, é incluído um método alternativo de apresentar a teoria das superfícies, intitulado Método do Triedro Móvel, que consiste em escolher adequadamente, para cada ponto da superfície, uma base ortonormal $e_1(u,v)$, $e_2(u,v)$, $e_3(u,v)$ de $\mathbb{R}^3$ de tal forma que os vetores e_1, e_2 sejam tangentes à superfície. Desse modo, a autora proporciona, por meio de outras definições matemáticas, um outro entendimento matemático, embora menos intuitivo, relacionado a superfícies.

Por meio da análise do livro-texto de Geometria Diferencial de Teneblat, inferimos a ausência da concepção histórica dos conceitos e da previsão das possíveis concepções dos alunos, bem como a identificação de obstáculos epistemológicos, o que revela algumas questões fundamentais sobre o ensino da Geometria Diferencial.

Em relação a ausência de um contexto histórico, defende-se que a contextualização histórica dos conceitos pode auxiliar os alunos na compreensão e na evolução das ideias matemáticas das descobertas ao longo do tempo. Isso faz com que os conceitos de Geometria Diferencial sejam vistos como parte de uma narrativa maior, facilitando uma conexão mais profunda com o material.

Além dessas questões, a ênfase excessiva no caráter algorítmico e na noção de existência matemática de modo automático, além de desconsiderar os aspectos topológicos locais e a visualização gráfico-geométrica, pode ter impactos significativos na compreensão e no aprendizado dos alunos.

Pois, embora a habilidade de realizar cálculos algorítmicos seja essencial, é igualmente importante que os alunos desenvolvam uma compreensão intuitiva e gráfica dos conceitos, para uma compreensão dos conceitos de GD.

Conclusão

A análise do livro-texto de Teneblat foi realizada através das análises prévias da ED, com o intuito de se obter uma melhor compreensão acerca da transmissão de saberes da área de Geometria Diferencial no *lócus* acadêmico. Ao compreender como os alunos percebem e interpretam os conceitos de Geometria Diferencial, os professores podem adaptar suas explicações, exemplos e métodos de ensino para abordar mal-entendidos comuns e reforçar a compreensão correta. Isso torna o ensino mais eficaz e acessível, pois parte do conhecimento pré-existente dos alunos.

https://doi.org/10.21439/2965-6753.v3.e2024033 2965-6753

Em relação ao ensino de GD, foi discutido as dificuldades em entender propriedades intrínsecas versus extrínsecas das superfícies ou a natureza abstrata dos conceitos topológicos. Na obra analisada, apresenta-se o desenvolvimento de uma prática que auxiliem a compreensão de conceitos, o desenvolvimento da ferramenta ACOGEO, o que indica o início de uma pequena mudança no *lócus* acadêmico acerca do ensino da temática, a existência de uma preocupação no modo de transmissão do saber de GD para o aluno.

A compreensão de conceitos como espaços topológicos, homeomorfismos e a classificação de superfícies pode ser particularmente desafiador devido ao seu alto grau de abstração e à necessidade de pensar além das noções geométricas tradicionais.

Essas dificuldades são exacerbadas pela necessidade de visualizar e manipular mentalmente objetos em espaços de dimensões superiores, o que não é intuitivo para muitos estudantes. A falta de recursos visuais ou de ferramentas tecnológicas que permitam uma exploração mais concreta dessas ideias pode tornar o aprendizado ainda mais desafiador.

Para superar esses desafios, é essencial que os métodos de ensino da GD incluam o uso de representações visuais, ferramentas de software que permitam a manipulação de superfícies e objetos topológicos, e uma abordagem pedagógica que vá além da mera exposição teórica, incentivando uma compreensão mais intuitiva e interativa dos conceitos. Dessa forma, os alunos podem desenvolver uma compreensão mais sólida tanto das propriedades intrínsecas quanto das extrínsecas das superfícies, bem como da rica estrutura dos conceitos topológicos.

Ao integrar essas práticas, os alunos desenvolvem uma compreensão mais holística e flexível da disciplina, o que os capacita a resolver problemas complexos e explorar novas áreas de aplicação.

Portanto é fundamental discutir o desenvolvimento dessas práticas pedagógicas e como elas auxiliam os alunos na aplicabilidade dos conceitos de maneira criativa e eficaz em diversos contextos.

Agradecimentos

O presente trabalho foi desenvolvido por duas alunas de doutorado e bolsistas, primeira e quarta autora, do programa de pós-graduação RENOEM, Doutorado em Ensino polo IFCE-campus Fortaleza. Além disso, o presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico- FUNCAP, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico- CNPQ- Brasil e por Fundos Nacionais de

Portugal através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P. no âmbito dos projetos UIDB/00194/2020 (https://doi.org/10.54499/UIDB/00194/2020) e UIDP/00194/2020 (https://doi.org/10.54499/UIDP/00194/2020) (CIDTFF).

Referências

ALBUQUERQUE, R. (2004). **Introdução à Geometria Diferencial**. Departamento de Matemática. Universidade de Évora, Portugal.

ALMOULOUD, Ag Saddo. **Fundamentos da Didática da Matemática.** São Paulo: Editora UFPR. 2007.

ALVES, F. R. Aplicações da sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis. 2011. **Tese de Doutorado.** Tese doutoral em educação matemática). Universidade Federal do Ceará–UFC.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática para a construção de gráficos no Cálculo: experiência num curso de Licenciatura em Matemática**. Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, p. 1-21, 2012.

ALVES, Francisco. R. V. (2013a) Exploring L´Hospital Rule with the Geogebra. **GGIJRO - Geogebra International Journal of Romania**, p. 15-20. Disponível em: http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-1/. Acesso em : 03 de Agosto de 2019.

ALVES, Francisco. R. V. (2013b) Visualizing in Polar Coordinates with Geogebra. **GGIJRO - Geogebra International Journal of Romania**. 2013b, p. 21-30. Disponível em: http://ggijro.wordpress.com/issues/vol-3-no-1/. Acesso em : 03 de Agosto de 2019.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Construção de curvas parametrizadas: uma discussão sobre o uso dos *software*s Geogebra e CAS Maple. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657**, v. 3, n. 1, p. 22, 2014.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educ.**, Paranaíba, v.7, n. 21, p.131-150, 2016.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Sobre a evolução matemática, histórico-epistemológica do modelo de Fibonacci: sobre a abordagem matricial. **Revista Thema**, v. 14, n. 1, p. 91 – 111, 2017.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números (Generalizados) de Catalan (NGC) Didactical Engineering: about the teaching of generalized Catalan numbers. **Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 20, n. 2, out. 2018. ISSN 1983-3156. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/36808>. Acesso em: 05 jan. 2019. doi:https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p47-83.

ARAÚJO, Cláudio Lourenço *et al*. **Geogebra como recurso facilitador do processo de ensino-aprendizagem de curvas planas.** Dissertação mestrado, Universidade Federal de Goiás - UFG, 2018.

ARTIGUE, Michéle *et al*. **Ingeniería didáctica en educación matemática**. 1995.Disponível em : http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf . Acesso em 30 de Maio de 2024.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**. São Paulo: Contra-Ponto, 1995.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais : introdução aos parâmetros curriculares nacionais** .Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997.

DO CARMO, Manfredo P**. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.**2ªed. Rio de Janeiro: Editora SBM; 2016

DOS SANTOS, Arlem Atanazio.(2017). **Engenharia Didática sobre o estudo e ensino da fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da Sequência de Fibonacci**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará- IFCE, Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática),Fortaleza.

GRANDE, A.L. NUNES, L.D.O. SILVA, M.P.D .**O estudo do Teorema Fundamental das Curvas Planas utilizando o Geogebra.** In: Conferência Interamericana de Educação Matemática. Tuxtla- Chiapas - México. 2015.

PAIVA, Ana Carla Pimentel; ALVES, Francisco Regis Vieira. Utilização do Geogebra como auxílio no ensino de curvatura de curvas planas e espaciais. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657**, v. 7, n. 2, p. 65-79, 2018.

PAIVA, Ana Carla Pimentel. **Engenharia didática sobre o estudo e ensino de conceitos de geometria diferencial [conteúdo digital] : descrição de situações didáticas com a utilização do software Geogebra.**Dissertação em Ensino de Matemática- Programa em Ensino de Ciências e Matemática -PGECM- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - Campus Fortaleza. 173f. 2019

PALMAS , Óscar A . V.; VICTORIA, Reyes; GUADALUPE, J. **Curso de geometría diferencial. Parte 1. Curvas y superficies.** Editora: Editorial: Universidad Nacional Autónoma de México- UNAM. 2005.

PIRES, Antônio S. T. **Geometria Diferencial para físicos** .1ª ed. São Paulo : Livraria da Física; 2015.

POMMER, Wagner Marcelo. Brousseau e a idéia de Situação Didática. **SEMA–Seminários de Ensino de Matemática.** São Paulo, FEUSP, 2008.

MONTIEL, Sebastián; ROS, Antonio. **Curves and surfaces**. Editora: American Mathematical Soc., 2009.

NETO, Antonio Caminha Muniz.**Tópicos de geometria diferencial**. 1ª ed**.** Rio de Janeiro: Editora SBM;2014.

ROSA, C. P., RIBAS, L., & BARAZZUTTI, M. (2012). *ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS.* In: III Escola de Inverno de Educação Matemática 1o Encontro Nacional PIBID-MATEMÁTICA,01 a 03 de agosto de 2012, Santa Maria: Rio Grande do Sul. **Anais: 1º Encontro Nacional do Pibid-Matemática**, Universidade Federal de Santa Maria — UFSM, Santa Maria. Disponível em : http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/RE/RE_2_Rosa_Carine_Pedroso.pdf . Acesso em 6 de março de 2024.

STRUIK, Dirk J. **Lectures on classical differential geometry**. Editora: Courier Corporation, 2012.

TENEBLAT, Keti. 2008**. Introdução à Geometria Diferencial**.ed. 2ª. Editora Blucher. São Paulo.

WILLMORE, Thomas James. **An introduction to differential geometry**. Editora: Courier Corporation, 2013.

Submetido em 11 de junho de 2024.
Aceito em 31 de agosto de 2024.
Publicado em 05 de setembro de 2024.